

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИБРЕЖНЫХ АКВАТОРИЯХ МОРЕЙ

А.В. Мариненко, М.И. Эпов, Э.П. Шурина

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия

В прибрежных частях морских акваторий наблюдается изменение солёности воды с глубиной, что приводит к изменению ее электропроводности от дневной поверхности до дна. Рассматриваются схемы вычисления монохроматических электрических полей на базе векторного метода конечных элементов с различными реализациями зависимости коэффициента электропроводности от глубины. Для анализа влияния вертикального градиента электропроводности на электрическое поле на разных частотах выполнены расчеты его пространственного распределения.

Морская геофизика, метод конечных элементов, электрическое поле, коэффициент электропроводности, электрический заряд.

MODELING ELECTROMAGNETIC FIELD IN SHELF AREAS

A.V. Marinenko, M.I. Eпов, and E.P. Shurina

Water salinity at shallow sea depths in shelf areas changes with depth, which causes respective conductivity changes. We discuss algorithms for computing monochromatic electric fields using the vector finite-element method with different realizations of depth dependence of conductivity. The algorithms have been applied to compute vertical conductivity patterns and to explore its influence on the electric field measured on the surface.

Marine geophysics, finite-element method, electric field, conductivity, electric charge

ВВЕДЕНИЕ

Широкое развитие морской электроразведки сопровождается постепенным расширением модельной базы за счет введения в модель структурных элементов и неоднородностей сложного строения. При этом практически всегда считается, что слой морской воды характеризуется постоянной электропроводностью. В то же время известно, что для прибрежных районов морей характерны изменения электропроводности по вертикали. Они обусловлены колебаниями температуры и солёности воды на различных глубинах. В каждой конкретной прибрежной зоне эта зависимость разная, но, как правило, носит линейный характер. Этому вопросу посвящено большое число работ [Егоров, 1974; Доронин, 1992; Михайлов, 1998; Михайлов, Повалишникова, 1999]. В соответствии с данными ЮНЕСКО [The Practical..., 1981] построены обобщенные зависимости (рис. 1).

Рассмотрим распределение электропроводности от солёности и температуры на примере Черного моря. Из-за его опреснения реками вода разделена на два слабосмешивающихся слоя [Вершинин, 2007]. Верхний (до ~100 м) преимущественно речного происхождения. В глубокие части моря поступает более солёная (более тяжелая) вода из Мраморного моря, она протекает по дну прол. Босфор (нижнебосфорское течение) и опускается вглубь. Поэтому солёность придонных слоев черноморской воды достигает 30 ‰. Изменение свойств воды с глубиной не плавное: с поверхности до 50—100 м солёность меняется быстро — от 17 до 21 ‰ (электропроводность изменяется примерно с 1.75 до 2.1 См/м), а уже далее (до дна) увеличивается равномерно (до 2.6 См/м).

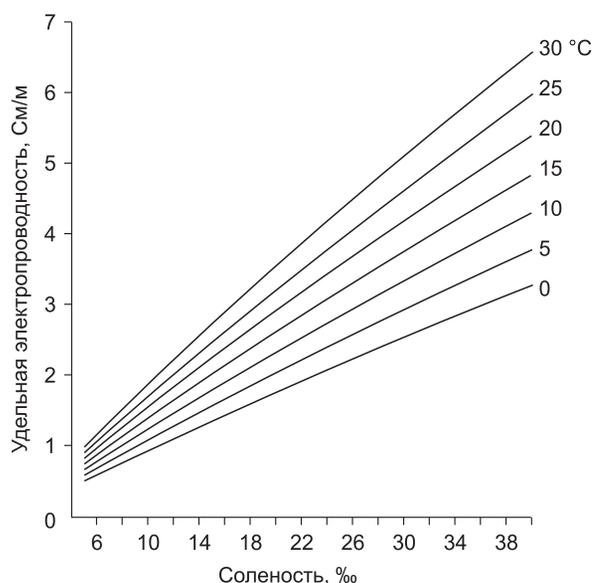


Рис. 1. Зависимость удельной электропроводности морской воды от солёности и температуры.

Вычисления гармонических по времени электрических полей выполняются векторным методом конечных элементов с различными зависимостями электропроводности от глубины моря.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Система уравнений Максвелла, описывающих процессы электромагнетизма, имеет вид [Баландин, Шурина, 2001]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma(x, y, z) \mathbf{E} + \mathbf{j}^e \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 \quad \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля (В/м); \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля (А/м); \mathbf{j}^e — вектор плотности стороннего тока (А/м²); ε — диэлектрическая проницаемость среды (Ф/м); μ — магнитная проницаемость среды (Гн/м); ρ — плотность электрических зарядов (Кл/м³); $\sigma(x, y, z)$ — удельная электропроводность (См/м), в общем случае функция пространственных координат.

Перейдем к уравнению второго порядка для вектора напряженности электрического поля \mathbf{E}

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Тогда с учетом второго уравнения системы (1) получаем

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma(x, y, z) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t}.$$

Представим компоненты \mathbf{j}^e и \mathbf{E} полученного уравнения в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^e &= \mathbf{j}^e e^{-i\omega t} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E} e^{-i\omega t} = (\mathbf{E}^{re} + i\mathbf{E}^{im}) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

где i — мнимая единица, индексы re , im — реальная и мнимая части.

Таким образом, поведение гармонического во времени электрического поля описывается векторным уравнением Гельмгольца

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = i\omega \mathbf{j}^e, \quad (2)$$

где $k^2 = i\omega\sigma(x, y, z) + \omega^2\varepsilon$ — волновое число, реальная часть \mathbf{j}^e отлична от нуля.

Выпишем закон сохранения свободного электрического заряда

$$\operatorname{div}((\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу, в которой электропроводность есть функция глубины $\sigma = \sigma(z)$. Тогда закон сохранения электрического заряда (3) примет вид

$$\frac{\partial \sigma(z)}{\partial z} E_z + (\sigma(z) + i\omega\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Если источник электромагнитного поля — замкнутая петля с током (индукционный источник), то

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}^e) = 0. \quad (5)$$

Первое слагаемое в (4) описывает дополнительный заряд, который может появиться за счет вертикального изменения электропроводности среды (необходимое условие его появления состоит в наличии ненулевой z -компоненты электрического поля).

Рассмотрим условия непрерывности электрического поля \mathbf{E} на границах Γ_{ij} , разделяющих подобласти с различными физическими свойствами. Тогда $\Omega = \bigcup \Omega_i$, где каждая Ω_i характеризуется своими значениями ε_i , μ_i , σ_i , и условия непрерывности электрического поля могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma} &= 0, \\ [\mathbf{n} \cdot (\sigma(z) + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}]_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

На границе области зададим однородные краевые условия

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = 0.$$

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Пусть Ω — трехмерная, в общем случае неоднородная по физическим свойствам область с Липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$. Введем следующие гильбертовы пространства:

$$\mathbb{H}(\Omega) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{L}_2(\Omega)\},$$

где $\mathbb{L}_2(\Omega)$ — пространство комплекснозначных или действительных функций интегрируемых на множестве Ω с квадратом,

$$\mathbb{H}(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{H}(\Omega), \text{rot } \mathbf{v} \in \mathbb{H}(\Omega)\} \subset \mathbb{H}(\Omega),$$

$$\mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u}^* d\Omega$$

и скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega.$$

Запишем вариационную постановку в форме Галеркина для уравнения (2). Найти $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{V}^* \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$ выполняется

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{V}^* \right) - (k^2 \mathbf{E}, \mathbf{V}^*) = i(\omega \mathbf{j}^e, \mathbf{V}^*). \quad (6)$$

Для пространства $\mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$ имеет место следующее свойство вложения:

$$\text{grad } \phi \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega), \quad \forall \phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (7)$$

На основании (7) в качестве \mathbf{V}^* можно взять $\text{grad } \phi$, где $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}, \text{rot } \text{grad } \phi \right) - (k^2 \mathbf{E}, \text{grad } \phi) = i(\omega \mathbf{j}^e, \text{grad } \phi), \quad \forall \phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Учитывая (5) и соотношение $\text{rot } \text{grad } \phi = 0$, имеем

$$\left((\omega^2 \varepsilon + i\omega\sigma(z)) \mathbf{E}, \text{grad } \phi \right) = 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (8)$$

Скалярно умножим уравнение (3) на $\mathbf{V}^* = \text{grad } \phi$ и в результате получим

$$\int_{\Omega} (\omega^2 \varepsilon + i\omega\sigma(z)) \mathbf{E} \cdot \text{grad } \phi d\Omega = \int_{\Omega} \text{div} \left[(\omega^2 \varepsilon + i\omega\sigma(z)) \mathbf{E} \right] \phi d\Omega, \quad (9)$$

где $\forall \phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Из (9) следует, что уравнение (8) является вариационным аналогом закона сохранения (4). Следовательно, решение вариационной задачи (6) удовлетворяет закону сохранения свободного электрического заряда в слабом смысле.

ВЫБОР КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

В расчетной области можно построить параллелепипедальную или тетраэдральную сетки [Нечаев, Шурина, 2005], на ячейках которых определяются базисные реберные (edge)-функции, ассоциированные с ребрами сетки конечномерного подпространства $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega) \subset \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$. Выбор параллелепипедальных конечных элементов (рис. 2, а) оптимален при построении простых по форме областей. При решении на структурированной параллелепипедальной сетке могут быть использованы базисные функции

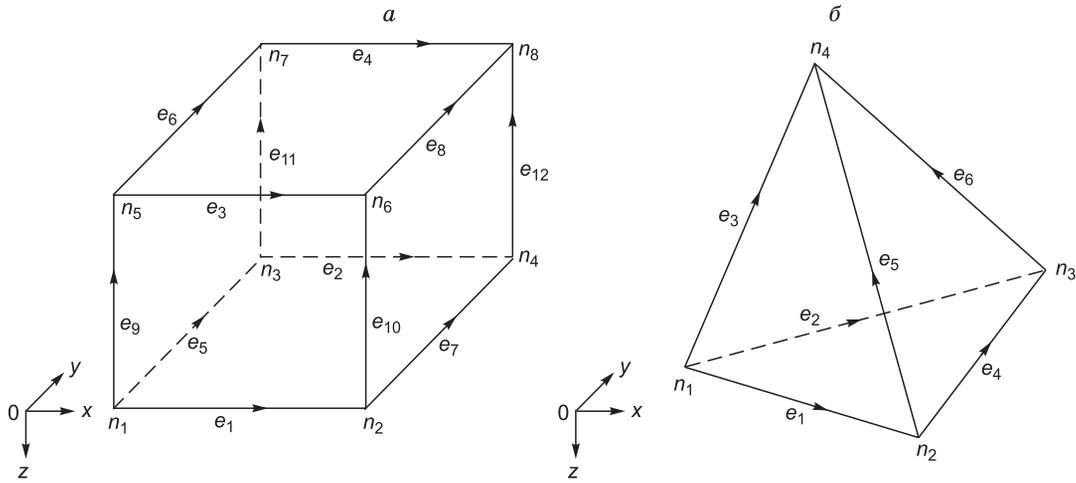


Рис. 2. Локальная нумерация ребер (e_i) и вершин (n_i) параллелепипедального (а) и тетраэдрального (б) конечных элементов.

низкого порядка. Итерационные методы решения на таких сетках характеризуются хорошей сходимостью. Но если сетку необходимо строить в сложных по форме областях, то в этих случаях нужно использовать «деформированные» параллелепипеды (его внутренние углы могут быть не равны 90°). Это приведет к необходимости перехода от эталонных конечных элементов к физической сетке [Solin, 2002]. Поэтому в геометрически сложных областях целесообразно использовать тетраэдры (см. рис. 2, б).

Рассмотрим оба варианта разбиения области на геометрические конечные элементы.

Для построения базисных функций на параллелепипеде введем вспомогательные функции:

$$\Psi_x^\pm = \frac{1}{l_x} \left(\mp x_c + \frac{l_x}{2} \pm x \right), \quad \Psi_y^\pm = \frac{1}{l_y} \left(\mp y_c + \frac{l_y}{2} \pm y \right), \quad \Psi_z^\pm = \frac{1}{l_z} \left(\mp z_c + \frac{l_z}{2} \pm z \right),$$

где $\{x_c, y_c, z_c\}$ — центр параллелепипеда, l_x, l_y, l_z — длины его ребер.

Базисные функции на параллелепипеде (пространство $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega; 1)$, векторные базисные функции первого порядка) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= (\Psi_y^- \Psi_z^-) \mathbf{i}, & \mathbf{N}_2 &= (\Psi_y^+ \Psi_z^-) \mathbf{i}, & \mathbf{N}_3 &= (\Psi_y^- \Psi_z^+) \mathbf{i}, & \mathbf{N}_4 &= (\Psi_y^+ \Psi_z^+) \mathbf{i}, \\ \mathbf{N}_5 &= (\Psi_x^- \Psi_z^-) \mathbf{j}, & \mathbf{N}_6 &= (\Psi_x^- \Psi_z^+) \mathbf{j}, & \mathbf{N}_7 &= (\Psi_x^+ \Psi_z^-) \mathbf{j}, & \mathbf{N}_8 &= (\Psi_x^+ \Psi_z^+) \mathbf{j}, \\ \mathbf{N}_9 &= (\Psi_x^- \Psi_y^-) \mathbf{k}, & \mathbf{N}_{10} &= (\Psi_x^+ \Psi_y^-) \mathbf{k}, & \mathbf{N}_{11} &= (\Psi_x^- \Psi_y^+) \mathbf{k}, & \mathbf{N}_{12} &= (\Psi_x^+ \Psi_y^+) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные орты декартовой системы координат.

Использование базисных функций низкого порядка на тетраэдрах не позволяет получить решение с приемлемой точностью. Поэтому построим иерархический базис пространства $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega; 2)$ (векторные базисные функции первого порядка второго типа) [Нечаев, Шурина, 2005]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1, & \mathbf{W}_2 &= \lambda_1 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_1, & \mathbf{W}_3 &= \lambda_1 \nabla \lambda_4 - \lambda_4 \nabla \lambda_1, \\ \mathbf{W}_4 &= \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2, & \mathbf{W}_5 &= \lambda_2 \nabla \lambda_4 - \lambda_4 \nabla \lambda_2, & \mathbf{W}_6 &= \lambda_3 \nabla \lambda_4 - \lambda_4 \nabla \lambda_3, \\ \mathbf{W}_7 &= \lambda_1 \nabla \lambda_2 + \lambda_2 \nabla \lambda_1, & \mathbf{W}_8 &= \lambda_1 \nabla \lambda_3 + \lambda_3 \nabla \lambda_1, & \mathbf{W}_9 &= \lambda_1 \nabla \lambda_4 + \lambda_4 \nabla \lambda_1, \\ \mathbf{W}_{10} &= \lambda_2 \nabla \lambda_3 + \lambda_3 \nabla \lambda_2, & \mathbf{W}_{11} &= \lambda_2 \nabla \lambda_4 + \lambda_4 \nabla \lambda_2, & \mathbf{W}_{12} &= \lambda_3 \nabla \lambda_4 + \lambda_4 \nabla \lambda_3, \end{aligned}$$

где λ_i — трехмерные барицентрические координаты относительно вершин тетраэдра.

Здесь первые шесть базисных функций ассоциированы с ребрами тетраэдра, а вторые шесть — с их центрами.

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Для построения дискретного аналога вариационной задачи аппроксимируем элементы пространства $\mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$ элементами дискретного подпространства $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega)$. Тогда дискретный аналог вариационной задачи (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E}_h^{re}, \text{rot} \mathbf{V}_h^{1*} \right)_{\Omega} - \left(\omega^2 \varepsilon \mathbf{E}_h^{re}, \mathbf{V}_h^{1*} \right)_{\Omega} + \left(\omega \sigma(z) \mathbf{E}_h^{im}, \mathbf{V}_h^{1*} \right)_{\Omega} &= 0, \\ \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E}_h^{im}, \text{rot} \mathbf{V}_h^{2*} \right)_{\Omega} - \left(\omega^2 \varepsilon \mathbf{E}_h^{im}, \mathbf{V}_h^{2*} \right)_{\Omega} - \left(\omega \sigma(z) \mathbf{E}_h^{re}, \mathbf{V}_h^{2*} \right)_{\Omega} &= \left(\omega \mathbf{j}^e, \mathbf{V}_h^{2*} \right)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Для построенных дискретных подпространств имеет место свойство включения:

$$\phi^h \in \mathbb{H}^h(\text{grad}; \Omega) \rightarrow \text{grad} \phi^h \in \mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega).$$

Поэтому аппроксимация вектора напряженности электрического поля \mathbf{E}_h будет удовлетворять закону сохранения электрического заряда в слабой форме:

$$\begin{aligned} \left(\omega \varepsilon \mathbf{E}_h^{re} - \sigma \mathbf{E}_h^{im}, \text{grad} \phi_h \right) &= 0, \quad \forall \phi_h \in \mathbb{H}_0^h(\text{grad}; \Omega), \\ \left(-\omega \varepsilon \mathbf{E}_h^{im} - \sigma \mathbf{E}_h^{re}, \text{grad} \phi_h \right) &= 0, \quad \forall \phi_h \in \mathbb{H}_0^h(\text{grad}; \Omega). \end{aligned}$$

Будем искать решение задачи в подпространстве $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}; \Omega)$ для реальной и мнимой частей $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{re} + i\mathbf{E}^{im}$. Представим эти величины в виде разложения по всем базисным функциям $\mathbf{N}_j \in \mathbb{H}_0^h(\text{rot}; \Omega)$

$$\mathbf{E}^{re} = \sum_j \alpha_j \mathbf{N}_j, \quad \mathbf{E}^{im} = \sum_j \beta_j \mathbf{N}_j. \quad (10)$$

Тогда решение вариационной задачи (6) будет эквивалентно решению системы уравнений относительно весов (α_j, β_j) в разложении (10)

$$\begin{pmatrix} \widehat{A} + \widehat{M}_\varepsilon & \widehat{M}_\sigma \\ -\widehat{M}_\sigma & \widehat{A} + \widehat{M}_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Элементы матриц \widehat{A} , \widehat{M}_ε , \widehat{M}_σ и вектора правой части \mathbf{F} определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \{\widehat{A}\}_{ij} &= \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_j \text{rot} \mathbf{N}_i d\Omega, \\ \{\widehat{M}_\varepsilon\}_{ij} &= -\omega^2 \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{N}_j \mathbf{N}_i d\Omega, \\ \{\widehat{M}_\sigma\}_{ij} &= \omega \int_{\Omega} \sigma(z) \mathbf{N}_j \mathbf{N}_i d\Omega, \\ \{\mathbf{F}\}_i &= \omega \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{j}^e d\Omega. \end{aligned}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (11) является несимметричной. В работе были опробованы несколько стандартных итерационных методов решений для несимметричных СЛАУ, такие как BiCGStab (BiConjugate Gradient Stabilized), CGS (Conjugate Gradient Squared), TFQMR (Transpose Free Quasi-Minimal Residual), GMRES (Generalized Minimum Residual) и MGCR (Modified Generalized Conjugate Residual). Наибольшую эффективность показал метод GMRES [Saad, Schultz, 1986], который и использовался в качестве основного. Для параллелепипедальной сетки матрица СЛАУ является хорошо упорядоченной (рис. 3). При использовании тетраэдральной сетки, по-

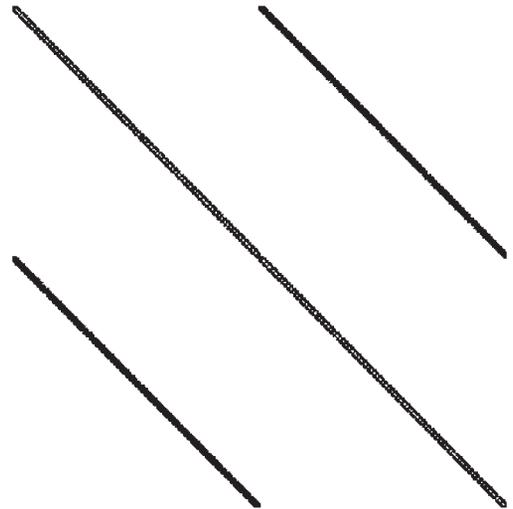


Рис. 3. Портрет матрицы для параллелепипедальной сетки.

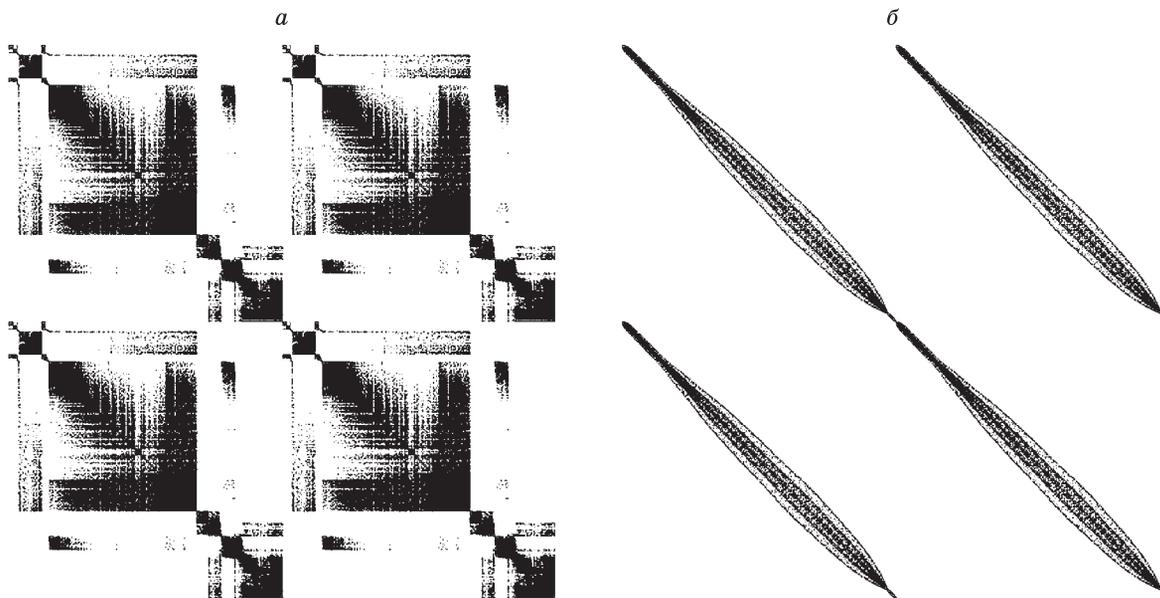


Рис. 4. Портреты матрицы для тетраэдральной сетки без применения алгоритма Cuthill-McKee (*a*) и с применением алгоритма (*б*).

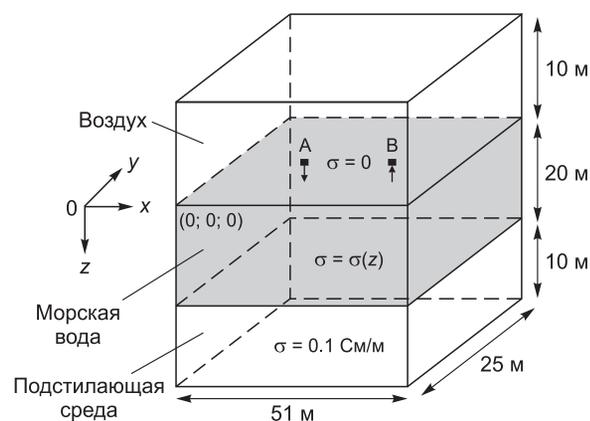
скольку она неструктурирована, портрет (т. е. распределение ненулевых элементов) результирующей матрицы сильно неупорядочен (рис. 4, *a*). Для структурирования матрицы СЛАУ применен модифицированный алгоритм перенумерации ребер тетраэдральной сетки Cuthill-McKee [Cuthill, McKee, 1969] (рис. 4, *б*). Попытки ускорить решение с помощью стандартных предобуславливателей, таких как метод Якоби, SSOR (Symmetric Successive Overrelaxation), ILU (Incomplete LU Factorization), малоэффективны. Поэтому в данной работе используются многоуровневые методы решения в сочетании с мультипликативным алгоритмом Шварца. Алгоритмы и эффективность данного подхода описаны в [Нечаев, Шурина, 2005].

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для оценки влияния вертикального изменения электропроводности выполнено моделирование гармонического электрического поля в среде, состоящей из трех областей: воздух (электропроводность считаем пренебрежительно малой), слой морской воды (электропроводность зависит от глубины), подстилающие горные породы. Размеры расчетной области и параметры модели приведены на рис. 5.

На поверхности морской воды находятся два токовых электрода — положительный (А) и отрицательный (В), которые питаются током силой 1 А. Частоту тока примем равной 100 Гц. Расстояние между питающими электродами выбрано немного большим, чем глубина моря, — 25 м.

Для моделирования можно использовать как параллелепipedальную, так и тетраэдральную сетки. В последнем случае используется меньшее количество ребер, и появляется возможность измельчать сетку в тех подобластях, где поля наиболее резко изменяются (вблизи источников), и задавать более редкую



сетку там, где эти изменения невелики (на большом удалении от источников). Например, для модели (см. рис. 5) общее число ребер параллелепipedальной сетки составило 320 866, а для тетраэдральной — 156 705 (примерно в 2 раза меньше). Тетраэдральная сетка обычно строится зеркально-симметрично относительно плоскости, которая делит расчетную область пополам по оси x и находится на равном удалении от токовых электродов. Такое построение необходимо для генерации идентичных сеток при геометрически одинаковых источниках.

Рис. 5. Модель среды и расчетная область.

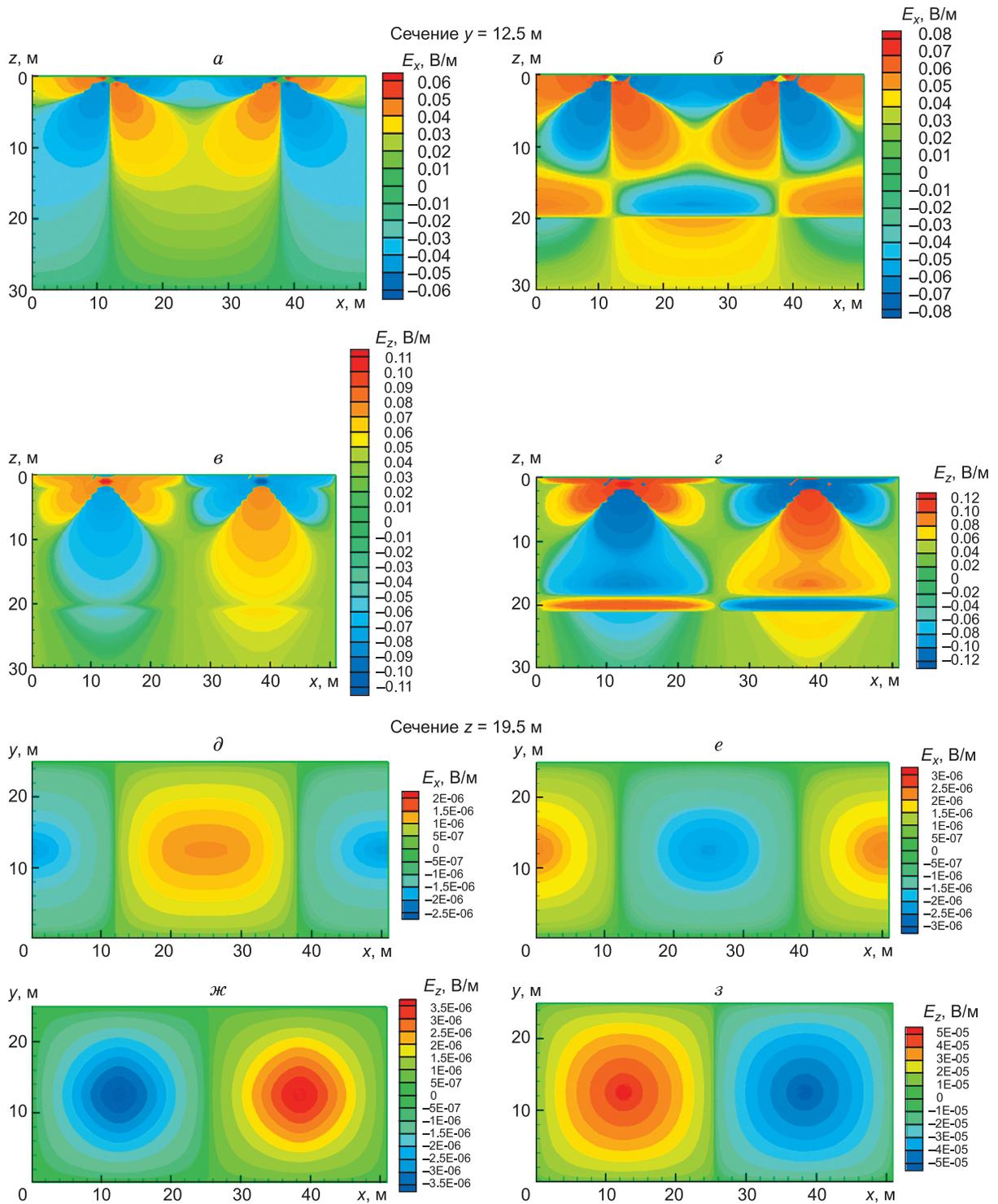


Рис. 6. Реальная часть электрического поля E_x (а, б, д, е); E_z (в, г, ж, з).

Слой морской воды — однородный (а, в, д, ж); градиентный (б, г, е, з).

Введем декартову систему координат, плоскость xOy которой совпадает с поверхностью моря, а ось z направлена вниз.

Традиционно при решении прямых задач морской геоэлектрики используются слоистые модели. Как правило, электропроводность морской воды, как и остальных слоев, считается постоянной и независимой от глубины. Выбор таких моделей обусловлен двумя факторами. Во-первых, существует ряд хорошо зарекомендовавших себя методов решения прямых задач для слоисто-однородных моделей. Во-вторых,

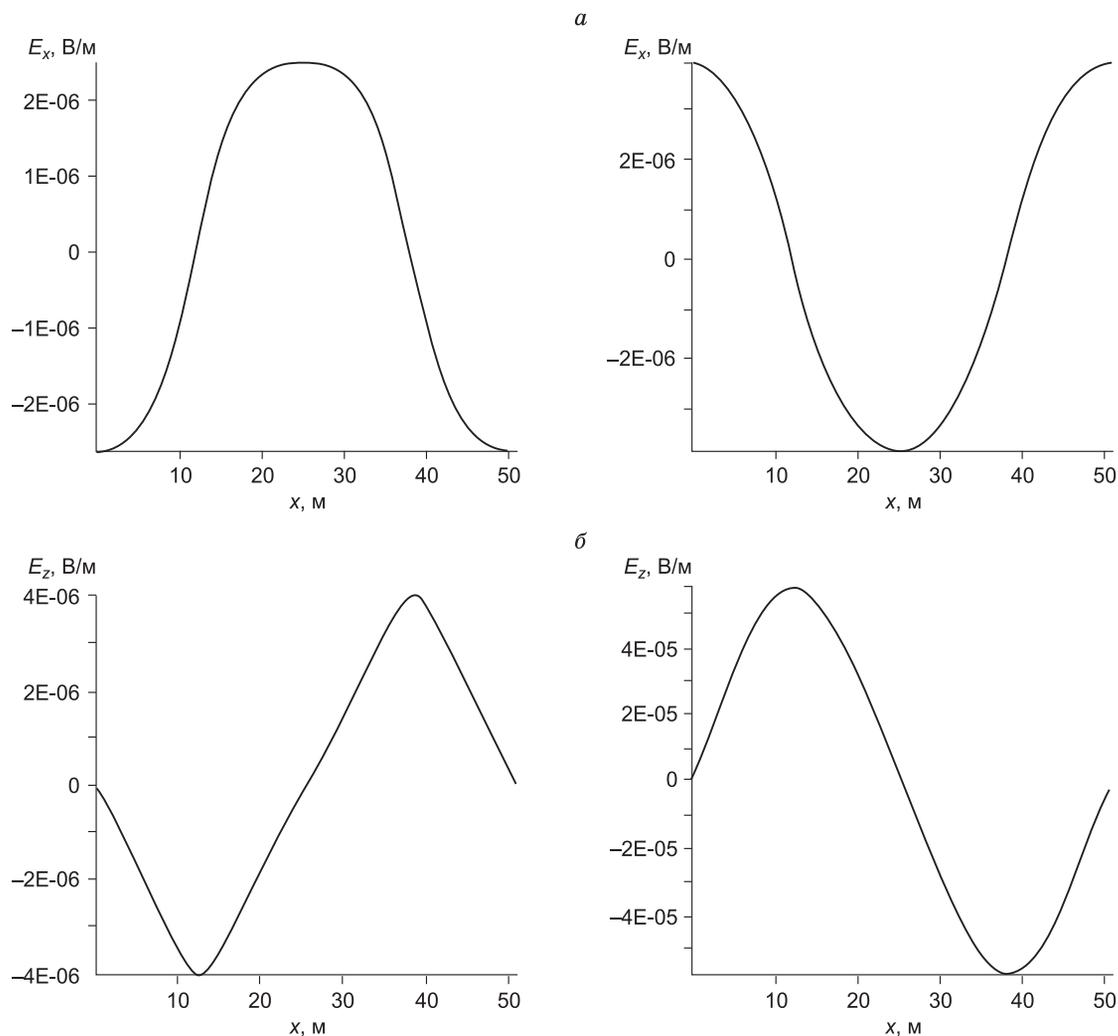


Рис. 7. Распределение x -компоненты (а), z -компоненты (б) электрического поля E в сечении $y = 12.5$ м, $z = 19.5$ м.

не удастся адекватно учесть все особенности пространственного распределения электропроводности, используя функциональную зависимость.

Электропроводность у поверхности воды примем равной 5 См/м, а вблизи дна 7 См/м. Будем считать зависимость $\sigma(z)$ линейной

$$\sigma(z) = \sigma_0 \left(1 + \frac{z}{50} \right),$$

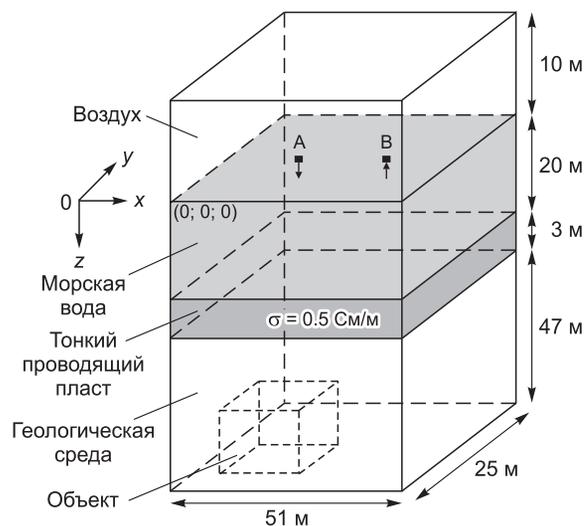
где $\sigma_0 = 5$ См/м.

Сравним результаты численных расчетов электрического поля для двух моделей: с градиентным $\sigma(z)$ верхним слоем и с однородным (эквивалентная средняя электропроводность $\sigma = 6$ См/м).

На рис. 6, а—г приведены распределения двух реальных компонент электрического поля в сечении $y = 12.5$ м для однородного (см. рис. 6, а, в) и градиентного (см. рис. 6, б, г) слоя морской воды, распределение этих же компонент в плоскости $z = 19.5$ м (см. рис. 6, д—з).

В верхней половине слоя морской воды распределения горизонтальной компоненты электрического поля хорошо коррелируют между собой. Разница между ними состоит в том, что в градиентном слое увеличиваются значения поля и возрастает контраст между положительными и отрицательными его частями. Наибольшие различия наблюдаются в придонной части, и они связаны с образованием объемно-распределенного заряда в градиентном слое с плотностью $\delta \sim \frac{\partial \sigma}{\partial z} E_z$, который отсутствует в слое с постоянной электропроводностью. Под границей находится компенсирующий объемный заряд другого знака.

Рис. 8. Расчетная область для модели с неоднородностью.



Противоположная ориентация графиков на рис. 7, *a*, *b* свидетельствует о том, что в градиентном слое (вблизи его подошвы) находится вторичный источник электрического поля (первый источник электрического поля — электроды), объемный электрический заряд. Распределение объемных зарядов при мало изменяющемся по латерали значении $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$ зависит от распределения вертикальной компоненты электрического поля. Последнее, в свою очередь, формируется преимущественно за счет расстановки токовых электродов. Следовательно, изменяя расстановку токовых электродов и текущие в них сторонние токи, можно управлять вторичными источниками, расположенными значительно ближе к исследуемой геологической среде и имеющими совершенно иные закономерности геометрического затухания поля, нежели от токовых электродов.

Проанализируем влияние непроводящего объекта на электрическое поле и оценим возможность его обнаружения по измерениям на поверхности.

Плохопроводящая ($\sigma = 0.01$ Cм/м) неоднородность в виде куба со стороной 10 м находится на глубине 50 м от морской поверхности (рис. 8). Равноудаленное расположение объекта от боковых границ расчетной области может существенно уменьшить вычислительные затраты, однако в реальной ситуации это практически никогда не выполняется.

Измерения электрического поля производятся вблизи поверхности воды с небольшим погружением измерительных электродов в воду ($z_0 = 0.2$ м).

Сначала сравним результаты численных расчетов в двухслойной и трехслойной (с тонким проводящим пластом) моделях, не содержащих неоднородность. В этом случае все компоненты поля E_x^{re} , E_y^{re} и E_z^{re} в двух моделях мало различимы. Однако на глубине они различаются и особенно сильно в компоненте E_y^{re} (рис. 9). Таким образом, влиянием тонкого проводящего слоя нельзя пренебречь.

На рис. 10 показано искажение различных компонент поля E^{re} (без объекта, с объектом), а также изменение значений электрического поля на поверхности (рис. 11) из-за влияния объекта.

Как видно из результатов (см. рис. 10, 11), объект не только влияет на характер поведения электрического поля E^{re} (исчезает антисимметрия слева и справа от плоскости $x = 25.5$ м), но и отражается на значениях всех трех компонент электрического поля E^{re} на поверхности (они становятся больше).

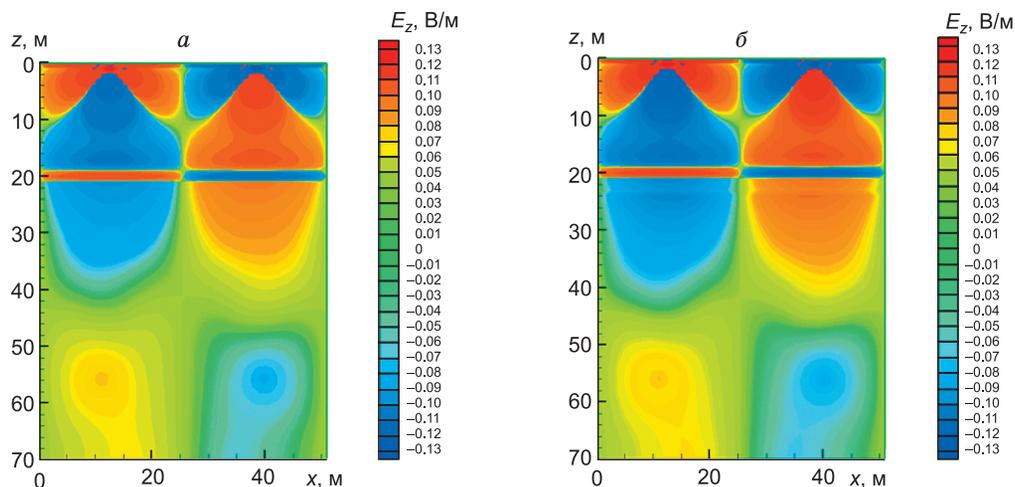


Рис. 9. Распределение компоненты поля E_z^{re} в сечении $y = 12.5$ м.

a — без проводящего тонкого слоя, *b* — с проводящим тонким слоем.

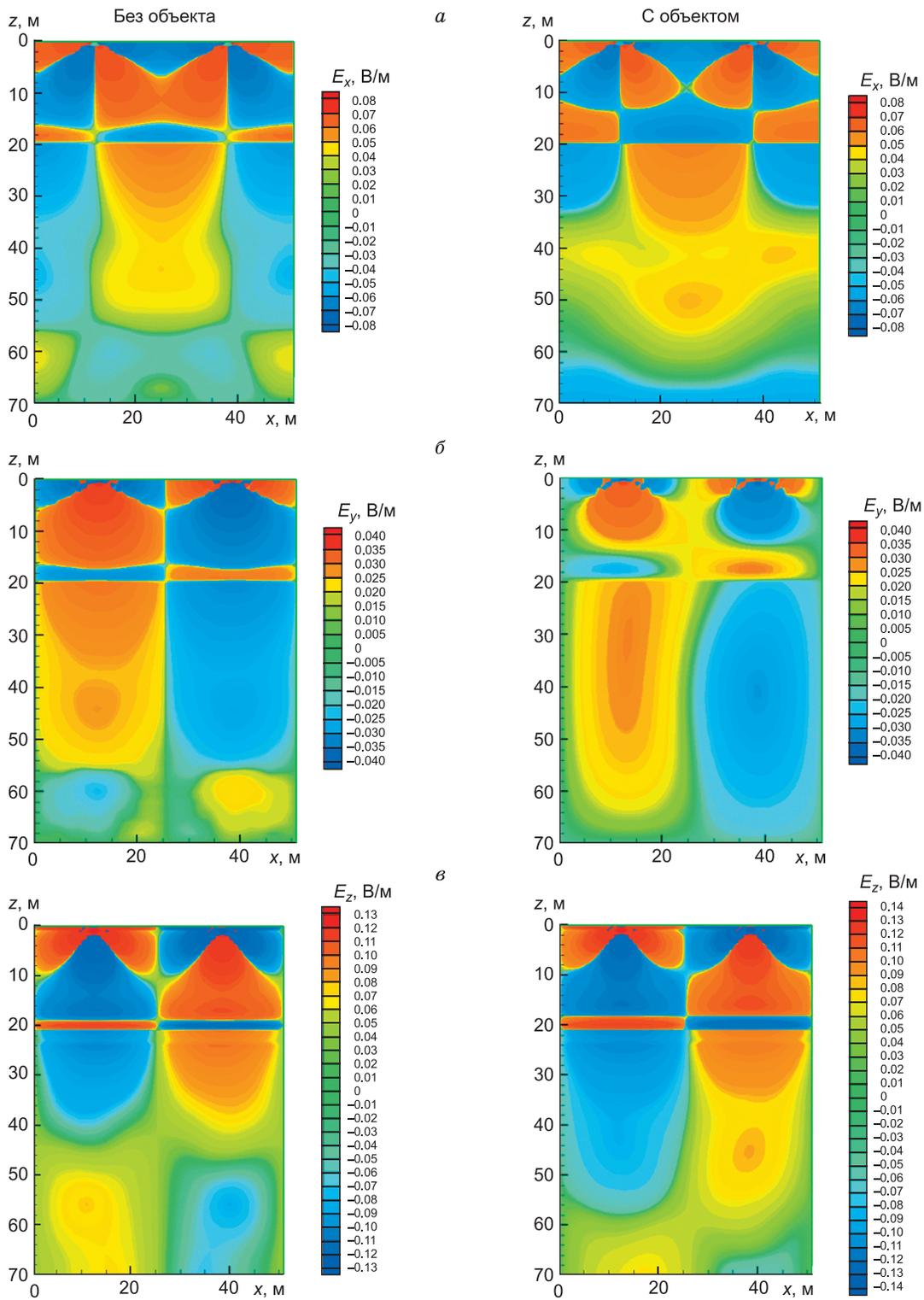


Рис. 10. Распределение компонент поля E_x^{re} (а), E_y^{re} (б), E_z^{re} (в) в сечении $y = 12.5$ м.

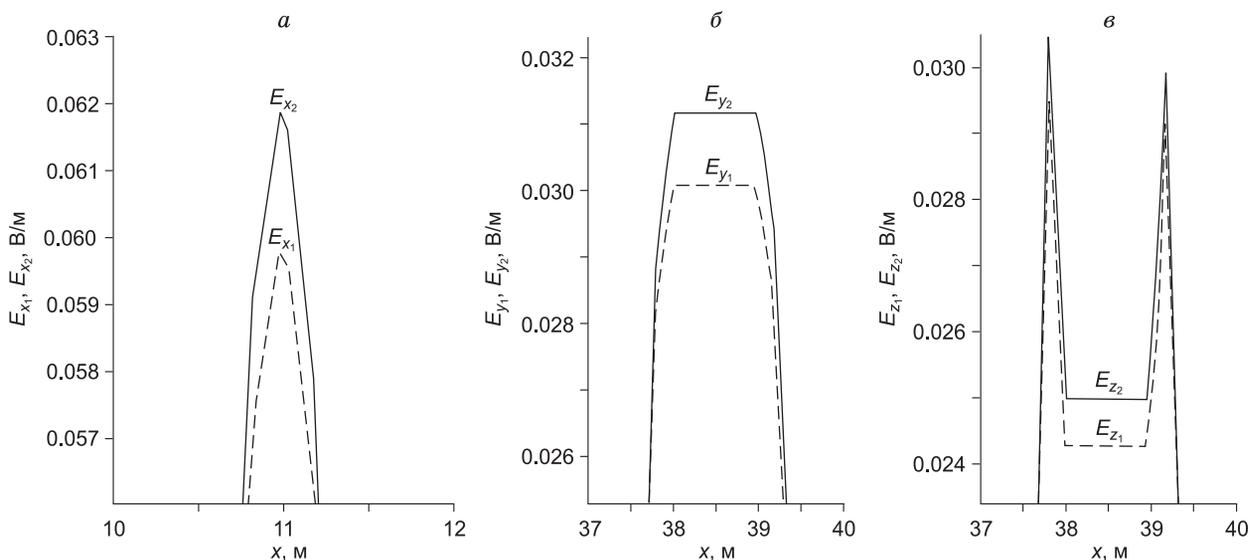


Рис. 11. Максимальные значения компонент поля E_x^{re} (а), E_y^{re} (б), E_z^{re} (в) в сечении $y = 12.5$ м, $z = 0.2$ м. $E_{x_1}, E_{y_1}, E_{z_1}$ — без объекта, $E_{x_2}, E_{y_2}, E_{z_2}$ — с объектом.

ВЫВОДЫ

Были выполнены вычислительные эксперименты для морской воды с осредненным значением коэффициента электропроводности и при линейной зависимости этого коэффициента от глубины. Численные эксперименты, использующие вычислительные схемы, учитывающие зависимость $\sigma(z)$, показали наличие объемных зарядов, сосредоточенных на границе, разделяющей слой морской воды и подстилающую среду. Эти источники поля могут быть использованы при создании новых методик морской геоэлектрики.

ЛИТЕРАТУРА

- Баландин М.Ю., Шурина Э.П.** Векторный метод конечных элементов. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2001, 69 с.
- Вершинин А.О.** Жизнь Черного моря. М., Краснодар, Когорта, 2007, 191 с.
- Доронин Ю.П.** Моделирование вертикальной структуры устьевой области реки с морским га-
ноклином // Метеорология и гидрология, 1992, вып. 8, с. 76—83.
- Егоров Н.И.** Физическая океанография. Л., Гидрометеиздат, 1974, 455 с.
- Михайлов В.Н.** Гидрология устьев рек. М., Изд-во Моск. ун-та, 1998, 176 с.
- Михайлов В.Н., Повалишников Е.С.** Гидрология морей. Методическое пособие. М., Изд-во Моск. ун-та, 1999, 79 с.
- Нечаев О.В., Шурина Э.П.** Многосеточный алгоритм решения векторным методом конечных эле-
ментов трехмерного уравнения Гельмгольца // Математическое моделирование, 2005, т. 17, № 6, с. 92—
102.
- Cuthill E., McKee J.** Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // Proc. 24th Nat. Conf. ACM, 1969, p. 157—172.
- Saad Y., Schultz M.H.** GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems // J. Scientific and Statistical Computing, 1986, v. 7, p. 856—869.
- Solin P.** Scalar and vector-valued finite elements of variable order. TICAM Report 02-36, The University of Texas at Austin, 2002, 85 p.
- The Practical Salinity Scale 1978 and the International Equation of State of Seawater 1980.** Unesco. Technical Papers in Marine Science Paris, 1981, № 36, 25 p.