

Южный федеральный университет
(ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича
(ИММиКН, г. Ростов-на-Дону)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
(ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва)



СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов

XVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ-ШКОЛЫ МОЛОДЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ

пос. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2019 г.

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2019

УДК 519.87(063)

ББК 22.18я7

С56

Ответственные редакторы: Г. В. Муратова, И. Н. Шабас

С56 Современные проблемы математического моделирования : сборник трудов XVIII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей (пос. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2019 г.) / отв ред. Г. В. Муратова, И. Н. Шабас ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2019. – 156 с.

ISBN 978-5-9275-3388-6

В сборнике представлены доклады участников XVIII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей "СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ", организованной Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, проходившей с 16 по 21 сентября 2019 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе школы приняли участие представители научных центров Новосибирска, Москвы, Санкт-Петербурга, Томска, Нижнего Новгорода, Ростова-на-Дону и других городов.

УДК 519.87(063)

ББК 22.18я7

ISBN 978-5-9275-3388-6

© ИММиКН им. И.И. Воровича ЮФУ, 2019

© Южный федеральный университет, 2019

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТОМОГРАФИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ¹

Мариненко А.В.

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.
Трофимука СО РАН, Новосибирск*

Введение

Современное состояние электротомографии имеет заметный перекося в сторону практики. На рынке программного обеспечения (ПО), решающего задачи инверсии, крепко обосновались несколько продуктов, активно используемых учеными со всего мира. Исходный код в этих программах является закрытым, а многие алгоритмические шаги выполняются в автоматическом режиме без возможности повлиять на них со стороны пользователя. Справедливости ради, следует отметить, что в большинстве случаев эти программы успешно справляются со своей задачей, а их регулярное обновление позволяет решать все более сложные задачи. Однако не редки случаи, когда автоматизация дает сбой, а результаты инверсии имеют существенные отличия для рядом стоящих профилей исследования или для программ от разных компаний. Как быть в этом случае? Каким результатам доверять и как их интерпретировать, если мы часто даже не знаем теоретической базы, заложенной в код программы? В данной работе представлен программный комплекс (ПК) DiInSo², который разрабатывается с целью дать большую свободу исследователю при использовании алгоритма инверсии, а также позволить моделировать прямые задачи высокой геометрической и физической сложности. Конечно, полноценное освоение данной программы займет какое-то время, однако итогом этого станет более четкое понимание получаемых результатов.

I Математическая модель

Математическая постановка для решения прямых задач представляет собой классический узловый метод конечных элементов на постоянном токе [1], а для решения обратных задач за основу была взята работа [2]. Такой выбор обосновывается возможностью использования треугольных и тетраэдральных сеток разбиения, которые позволяют задавать области практически

¹Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ФНИ №0331-2019-0007.

²<http://geoelectriclab.com/products/winsolver>

неограниченной геометрической сложности. Остановимся на этих постановках подробнее. Пусть на питающих электродах (А и В) электротомографической установки (рис. 1) задается постоянная разность потенциалов, либо значение стекающего поверхностного тока.

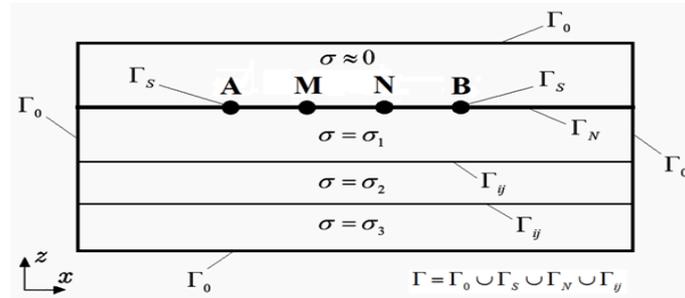


Рис. 1. Сечение X0Z расчетной области моделирования с электротомографической установкой АВМN.

Рассмотрим только первый тип возбуждения. В случае стекающего поверхностного тока указанные далее уравнения и формулы выводятся похожим образом. Определим напряженность электрического поля в среде при заданной постоянной разности потенциалов на питающих электродах. Предположим, что верхнее полупространство является воздухом с электропроводностью, близкой к нулю (рис. 1). Нижнее проводящее полупространство будем считать многослойным. Допускается наличие неоднородностей как в верхнем, так и в нижнем полупространстве. Введем правостороннюю декартову систему координат. Уравнение плоскости, являющейся дневной поверхностью $Z = 0$. Ось Z направлена вверх. Каждый из слоев и неоднородностей характеризуется значениями удельной электропроводности σ (См/м), магнитной μ (Гн/м) и диэлектрической ϵ (Ф/м) проницаемости. Будем искать значения электрического потенциала во всех точках области моделирования. Запишем систему уравнений Максвелла в стационарном режиме [3]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (4)$$

Здесь \vec{E} — напряженность электрического поля (В/м), \vec{D} — электрическая индукция (Кл/м³); \vec{H} — напряженность магнитного поля (А/м); \vec{B} — магнитная индукция (Тл); \vec{J} — плотность стороннего поверхностного тока (А/м²). Введем уравнения состояния: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Введем скалярный электрический потенциал φ (В). Из (1) следует, что:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (5)$$

Граница расчетной области $\partial\Omega$ (рис. 2) совпадает с Γ_0 , на которой искомые значения близки к нулю. Если среда выше границы <земля-воздух> Γ_N не содержит проводящих объектов, верхняя граница расчетной области $\partial\Omega$ представляет собой объединение Γ_N и Γ_S . На Γ_N задаются условия непротекания для нормальной компоненты плотности тока:

$$\vec{n} \cdot \vec{J} \Big|_{\Gamma_N} = \vec{n} \cdot \sigma \vec{E} \Big|_{\Gamma_N} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_N} = 0,$$

где \vec{n} — единичная внешняя нормаль к границе Γ_N .

На границе <электрод-среда> Γ_S зададим значение потенциала:

$$\varphi \Big|_{\Gamma_S} = \varphi_0.$$

Функция φ_0 на участках границы Γ_S , соответствующих расположению питающих электродов, равна заданной разности потенциалов. Например, при разности потенциалов равной $2b$, функция может быть задана следующим образом:

$$\varphi_0 = \begin{cases} b, & \text{на } \Gamma_S^A, \\ -b, & \text{на } \Gamma_S^B. \end{cases} \quad (6)$$

На границах Γ_{ij} , разделяющих подобласти с разной удельной электропроводностью, задаются условия сопряжения для электрического поля \vec{E} :

$$\left[\vec{n} \times \vec{E} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

$$\left[\vec{n} \cdot \sigma \vec{E} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0.$$

Эти условия определяют непрерывность потенциала φ и его нормальной производной на границах Γ_{ij} :

$$[\varphi]_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

$$\left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

где \vec{n} — единичная внешняя нормаль к Γ_{ij} .

Таким образом, можно сформулировать следующую краевую задачу:

$$-\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \text{в } \Omega = \bigcup_i \Omega_i, \quad (7)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_S} = \varphi_0, \quad (8)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_N} = 0, \text{ при отсутствии объектов выше границы } \langle \text{земля-воздух} \rangle, \quad (10)$$

$$[\varphi]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad (11)$$

$$\left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0. \quad (12)$$

Запишем вариационную формулировку для этой краевой задачи. Введем следующие пространства:

$$H^1 = \{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \text{grad} \varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega) \},$$

$$H_0^1 = \{ \varphi \in H^1(\Omega), \varphi|_{\partial \varphi} = 0 \},$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad} u \cdot \text{grad} v \, d\Omega,$$

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 \, d\Omega.$$

Вариационная формулировка в форме Галеркина имеет вид: *Найти* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *такое, что* $\varphi - \varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ *и* $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sigma \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} v \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_{ij}} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{ji}} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_j} v \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

где \vec{n}_0 — единичная внешняя нормаль к Γ_0 , \vec{n}_i — единичная внешняя нормаль к Γ_{ij} , \vec{n}_j — единичная внешняя нормаль к Γ_{ji} , $\vec{n}_i = -\vec{n}_j$.

С учетом (9)-(12), вариационное уравнение (13) примет вид:

$$- \int_{\Omega} \sigma \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} v \, d\Omega = 0. \quad (14)$$

Вариационная задача может быть решена с помощью узлового метода конечных элементов путем построения конечно-элементного аналога вариационного уравнения (14). Моделируемая область и объекты в ней разбиваются на конечные элементы определенного типа. На них задаются базисные функции [4]. В работе использовались линейные базисные функции на нерегулярном тетраэдральном разбиении. То есть на отдельном конечном элементе функция определена только в вершинах тетраэдра [5]. Сетка при таких разбиениях сгущается в тех областях, где расположены влияющие на моделирование объекты, и где наибольшие пространственные изменения электрического поля. Используя выбранный базис, получаем систему

линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для ее решения использовался метод сопряженных градиентов (МСГ) [6] в параллельной реализации для центральных (CPU) или графических (GPU) процессоров. Решением СЛАУ являются значения потенциала φ в узлах сетки. Значения векторного электрического поля \vec{E} при необходимости могут быть вычислены в соответствии с (5). Далее все измеренные сигналы трансформируются в кажущиеся сопротивления (КС) ρ_k (Ом·м) [7]:

$$\rho_k = k \frac{U_{MN}}{I_{AB}}, \quad (15)$$

где U_{MN} — измеряемая разность потенциалов (В) между электродами М и N, I_{AB} — ток (А) в линии АВ, а $k = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}}$ — коэффициент установки (м). Расположения электродов установки в пространстве и значения КС, в общем случае, являются входными данными для решения задачи инверсии, которое основано на схеме Гаусса-Ньютона, описанной далее.

Пусть \vec{m} — вектор из M параметров $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)^T$ [2]. Каждый m_j описывает физические свойства отдельного тетраэдра сетки или функции на нем. Так как величины удельных сопротивлений ρ_j (Ом·м) должны быть положительными, m_j может быть определен как $m_j = \log \rho_j$. Аналогичным образом определяются логарифмы измеренных КС: $\log(\rho_{ki}) = d_i$, которые используются для построения вектора данных $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_D)^T$. Данные ассоциированы с ошибками измерений ε_i , которые используются в качестве весового параметра. Используя l_2 -норму взвешенной невязки между данными \vec{d} и откликом модели $\vec{f}(\vec{m}) = (f_1(\vec{m}), f_2(\vec{m}), \dots, f_D(\vec{m}))$, будем минимизировать функционал данных Φ_d , определенный как:

$$\Phi_d(\vec{m}) = \sum_{i=1}^D \left| \frac{d_i - f_i(\vec{m})}{\varepsilon_i} \right|^2 = \left\| \mathbf{D} (\vec{d} - \vec{f}(\vec{m})) \right\|_2^2,$$

где $\mathbf{D} = \text{diag}(1/\varepsilon_i)$.

Если ошибки измерений не получены в ходе измерений, они оцениваются приблизительно по принципу «чем больше разнос электродов установки, тем выше ошибка измерений». Более точно метод оценки весового параметра ε_i описан, например, в работе [8].

Поскольку минимизация Φ_d представляет собой некорректную задачу, необходимо использовать дополнительный модельный функционал Φ_m [9]. Φ_m взвешивается параметром регуляризации λ , а исходная задача преобразуется в минимизацию функционала следующего вида:

$$\Phi = \Phi_d + \lambda \Phi_m \rightarrow \min. \quad (16)$$

Φ_m определяется как квадратичная норма произведения матрицы \mathbf{C} и разности между моделью \vec{m} и стартовой моделью \vec{m}^0 :

$$\Phi_m(\vec{m}) = \left\| \mathbf{C} (\vec{m} - \vec{m}^0) \right\|_2^2.$$

Элементы матрицы \mathbf{C} определяются из построенной тетраэдральной сетки по простому правилу: если у двух тетраэдров i и j имеется общая грань-треугольник g , то $C_{g,i} = -1$ и $C_{g,j} = +1$, где вместо единиц можно использовать площадь треугольника. Остальные элементы матрицы являются нулями. Таким образом, $\mathbf{C} \in R^{B \times M}$ — разреженная матрица с $2M$ ненулевыми элементами, где B — число граней.

Как ясно из формул выше, модельный вектор \vec{m} обновляется в ходе итерационной процедуры решения задачи инверсии: $\vec{m}^{k+1} = \vec{m}^k + \tau^k \Delta \vec{m}^k$, где τ — параметр длины шага, а k — номер итерации.

Применив схему Гаусса-Ньютона для минимизации (16) получим выражение вида [10]:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \Delta \vec{m}^k = \\ & = \mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} (\vec{d} - \vec{f}(\vec{m}^k)) - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\vec{m}^k - \vec{m}^0), \end{aligned} \quad (17)$$

где \mathbf{S} — матрица Якоби.

Элементами матрицы Якоби \mathbf{S} являются значения чувствительности, определяемые как частные производные откликов модели f_i от параметров модели m_j :

$$S_{i,j}(\vec{m}^k) = \frac{\partial f_i(\vec{m}^k)}{\partial m_j}.$$

Расчет матрицы Якоби в явном виде является чрезвычайно затратной процедурой, поэтому часто прибегают к ее упрощению. Например, из теоремы взаимности [11] можно вывести аналитическое выражение для чувствительности импеданса Z по отношению к изменению электропроводности $\delta\sigma$:

$$\delta Z = -\delta\sigma \iiint_{\Omega_i} \frac{\nabla u^S \nabla u^R}{I^S I^R} d^3r,$$

где Ω_i — область, где измеряется чувствительность; u^S — потенциал, порожденный токовыми электродами; u^R — потенциал, полученный при замене токовых и приемных электродов. Соответствующие токи обозначены как I^S и I^R .

В соответствии с формулировками [12, 13]:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma^{(e)}} = -\frac{1}{\sigma^{(e)} I} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{(e)} u_i^S u_j^R, \quad (18)$$

где чувствительность при изменении электропроводности $\sigma^{(e)}$ на конечном элементе получена суммированием произведений потенциалов и элементов матрицы жесткости $\mathbf{S}^{(e)}$, которая известна по методу конечных элементов [5].

Система уравнений (17) должна решаться на каждом шаге итерации. В отличие, например, от рентгеновской томографии матрица \mathbf{S} в нашем случае будет плотной. Для больших задач иногда может быть полезным исключить из \mathbf{S} малые абсолютные значения, тем самым приведя \mathbf{S} к разреженному виду. Для решения уравнения (17) используется адаптированный МСГ, называемый CGLSCD и учитывающий весовые параметры данных и модельные ограничения [14]. Дополнительное улучшение алгоритма может быть получено за счет процедуры предобуславливания [15]. Результатом решения СЛАУ (17) является обновление искомой модели $\Delta\vec{m}^k$.

Важным вопросом является правильный выбор параметра регуляризации λ . Задавая данный параметр мы должны пытаться найти определенный компромисс между соответствием данных об удельных сопротивлениях и геометрической точностью подобластей. Малые значения λ дают более четкую геометрию, но происходит потеря точности значений сопротивлений. Большие значения λ , наоборот, сильно сглаживают геометрию, часто давая существенно увеличенные размеры подобъектов среды, однако значения сопротивлений здесь более точные. Очень важно, чтобы пользователь ПО понимал смысл параметра регуляризации λ и задавал его значения исходя из решаемой задачи. В программе DiInSo, кроме ручного задания параметра регуляризации, можно использовать и автоматический подбор λ методом так называемых L-кривых [16]. Математического обоснования эффективности данного метода не существует, а его смысл состоит в том, чтобы выбранное значение λ обеспечивало примерно равнозначный вклад функционалов Φ_d и Φ_m в итоговое решение. Часто это соответствует оптимальному значению λ , однако далеко не всегда. С другой стороны, при всех недостатках данного метода, не существует сколько-нибудь достойной ему альтернативы для численной реализации, кроме методов подбора, которые увеличивают время решения задачи инверсии в десятки раз.

После получения решения $\Delta\vec{m}^k$, необходимо провести обновление модели по уже описанной выше формуле: $\vec{m}^{k+1} = \vec{m}^k + \tau^k \Delta\vec{m}^k$. Параметр длины шага τ^k определяется таким, чтобы предотвратить переход модели в состояние нелинейности. Чтобы избежать прямых расчетов множества возможных значений τ_i^k , используется линейная интерполяция между старым и новым модельным откликом:

$$\vec{f}(\vec{m}^k + \tau\Delta\vec{m}^k) \approx \tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{m}^k) + \tau \left[\vec{f}(\vec{m}^k + \Delta\vec{m}^k) - \vec{f}(\vec{m}^k) \right],$$

которая дает слабое приближение, но достаточное для получения соответствующей длины шага [14]. Параметр τ^k в данном подходе определяется так, чтобы $\Phi_d(\tilde{\mathbf{f}}(\tau) + \lambda\Phi_m(\tau))$ минимизировался. После обновления модели прямой отклик $\vec{f}(\vec{m}^{k+1})$ уже вычисляется точно.

Итерационная процедура повторяется пока не будет достигнут критерий останова, которым является либо стагнация функционала Φ , либо достижение допустимого уровня ошибки, который в DiInSo равен 1%. Пользователь

должен понимать, что при решении сложных задач инверсии выход из итерационной процедуры по критерию стагнации происходит значительно чаще и поэтому не будет лишним обратить внимание на уровень точности, достигнутый в ходе решения и, возможно, провести корректировку исходных параметров задачи инверсии или даже входных данных, если точность недостаточная.

II Численный эксперимент

Электротомография часто выполняется с использованием равномерной площадной системы «возбуждения-измерения» (рис. 2).

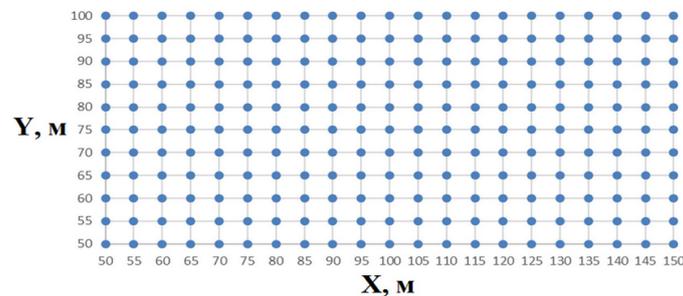


Рис. 2. Равномерная площадная система «возбуждения-измерения». Точками обозначено расположение электродов.

Рассмотрим в качестве примера электротомографию на кустовых площадках с эксплуатационными газовыми скважинами [17]. На площадке в большом количестве присутствуют надземные и подземные металлические конструкции: трубы, сваи, обсадные колонны. Модель типичной площадки, основных металлических конструкций и положение возможных относительно низкоомных зон растепления показана на рис. 3.

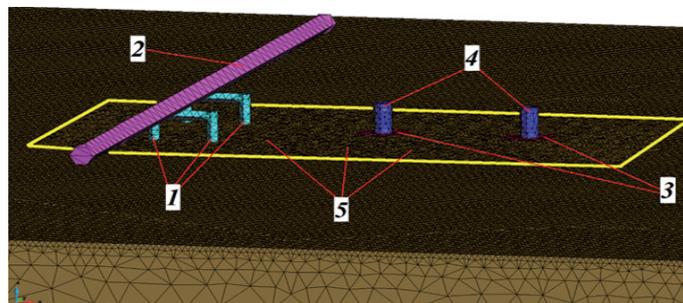


Рис. 3. Модель кустовой площадки с двумя скважинами (1 — металлические опоры, вбитые в землю; 2 — металлическая труба, расположенная на опорах; 3 — зоны растепления вблизи скважин; 4 — скважины с металлической обсадкой; 5 — область, где проводятся электротомографические исследования).

Многие ПК предоставляют возможность моделировать прямые задачи электротомографии, однако в них предполагается, что объекты выше границы «земля-воздух» не оказывают эффекта на конечный результат в следствии очень низкой электропроводности воздуха. С данным фактом сложно спорить, за исключением тех случаев, когда сильно проводящие сплошные или составные объекты частично находятся в земле, а частично в воздухе, образуя единую гальваническую систему. Именно эту картину мы можем наблюдать в нашем случае. При проектировании работ по электротомографии сначала выбирается тип зондирующей установки. Наиболее распространенной является установка Веннер-Альфа [7]. Она состоит из четырех равноудаленных электродов — двух питающих (А и В) и двух измерительных (М и N). Рассмотрим профиль в непосредственной близости от скважин и металлических опор, частично погруженных в землю. С помощью программы DiInSo решим численно прямую задачу для одного из набора положений установки Веннер-Альфа. Металлические опоры диаметром 2 м расположены в центрах следующих ячеек (рис. 2): (65-70 м; 60-65 м); (75-80 м; 60-65 м); (65-70 м; 80-85 м); (75-80 м; 80-85 м). Они заглублены на 10 м и выступают над дневной поверхностью на высоту 6 м. Диаметр лежащей на опорах трубы — 4 м, ее длина ограничена областью моделирования. Обсадные трубы диаметром 3 м расположены в центрах следующих ячеек: (100-105 м; 75-80 м); (125-130 м; 75-80 м). Они заглублены на 50 м и выступают над дневной поверхностью на высоту 6 м. Предполагаемые зоны растепления представляют собой горизонтальные полусферы радиусом 4.5 м. Питающие электроды с единичным током (± 1 А) и соответствующие приемные электроды расположены в точках профиля $Y = 80$ м сразу под дневной поверхностью $Z = 0$, то есть в крест простирания самой большой металлической трубы, лежащей на П-образных опорах, и рядом с обсадными трубами скважин. Электропроводность пород примем равной 0.001 См/м, металла — 7690000 См/м, зон растепления — 0.01 См/м, воздуха — 10^{-12} См/м. Результаты моделирования прямой задачи представлены на рис. 4, визуализация выполнена непосредственно в программе DiInSo. Условные глубины на рис. 4 изображены по простому правилу — «половина разноса установки» и не должны рассматриваться как истинные глубины метода электроразведки, которые определяются в ходе алгоритма инверсии из формулы расчета чувствительности (18).

Из рис. 4 видно, что на разрезе КС металлические опоры сливаются в единый «объект», зоны растепления выделяются достаточно четко, в то время как скважины образуют аномалию в области между ними на условных глубинах примерно от 10 до 25 м. При этом влияние длинной трубы остается минимальным.

Теперь рассмотрим ортогональный предыдущему профилю $X = 70$ м. Он проложен в непосредственной близости от П-образных опор и параллелен трубе, лежащей на них (рис. 3). На рис. 5 показаны результаты моделирования на таком профиле.

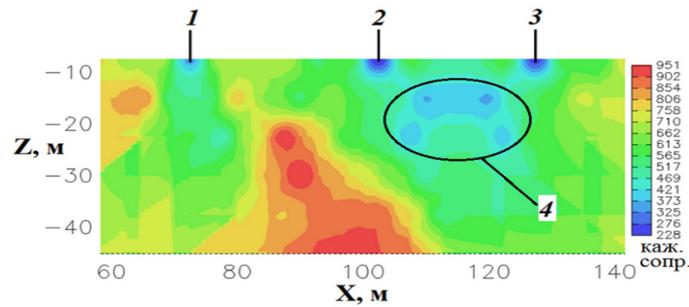


Рис. 4. Разрез КС ($Y = 80$ м, $Z = 0$) с разным положением установки Веннер-Альфа (1 — металлические опоры, 2 — левая скважина с зоной растепления, 3 — правая скважина с зоной растепления, 4 — аномалия).

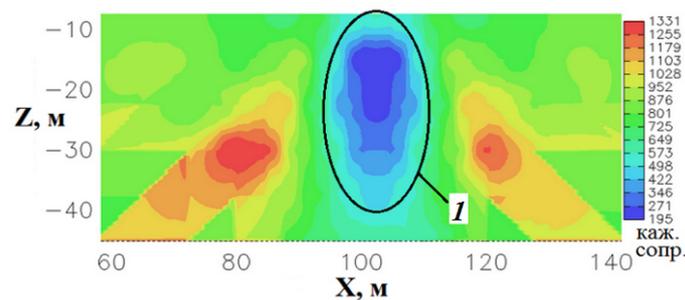


Рис. 5. Разрез КС ($X = 70$ м, $Z = 0$) с разным положением установки Веннер-Альфа (1 — аномалия).

На разрезе видна низкоомная аномалия, обусловленная П-образными опорами. Однако ее условная глубина (от 10 до 40 м) существенно больше, чем в предыдущем случае, хотя сами П-образные опоры расположены не так глубоко, как скважины. Эта аномалия характеризуется такими большими размерами по двум причинам. Во-первых, четыре П-образные опоры сливаются в одну. Во-вторых, значительно усиливается влияние трубы, расположенной на П-образных опорах, поскольку она на всем профиле находится над питающими и измерительными электродами. Данный эксперимент показывает, что учет объектов выше границы «земля-воздух» при решении прямой задачи может объяснить возможные аномалии ниже этой границы, возникающие в ходе электротомографических исследований.

Однако не нужно думать, что аномалии возникают исключительно из-за естественных помех в зоне наблюдений. Бывает и такое, что сам пользователь ПО ухудшает результаты решения задачи инверсии, не понимая особенностей работы алгоритма. Рассмотрим очень простую на первый взгляд задачу с однородной средой и единственной обсаженной металлической трубой скважиной в центре области моделирования. Все размеры и электрофизические параметры идентичны предыдущей модели. Глубина скважины увеличена до 100 м. Число возможных расположений установки Веннер-Альфа на профиле также увеличено с 63 до 392 в соответствии с возросшей глубиной скважины. Разрез КС показан на рис. 6.

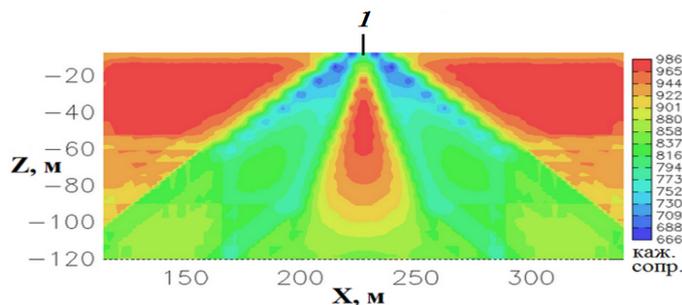


Рис. 6. Разрез КС ($Y = 80$ м, $Z = 0$) для одиночной скважины в центре области; (1 — скважина).

Одиночная обсаженная скважина порождает аномалию сложного строения. Ее центральную часть занимает высокоомная каплевидная область, погруженная в трапецевидную область средних значений КС. В верхней части разреза вблизи скважины выделяются наклонные полосы низких величин КС. Наличие трапецевидальной аномалии связано с тем, что обсадная металлическая труба сама становится источником тока, который с ее поверхности стекает в окружающую среду. Теперь используем полученные значения КС для решения задачи инверсии. На первом этапе выбор параметра регуляризации будет осуществляться в автоматическом режиме с помощью метода L-кривых, описанного выше. Результаты решения задачи инверсии представлены на рис. 7, визуализация выполнена в сторонней программе VisIt³.

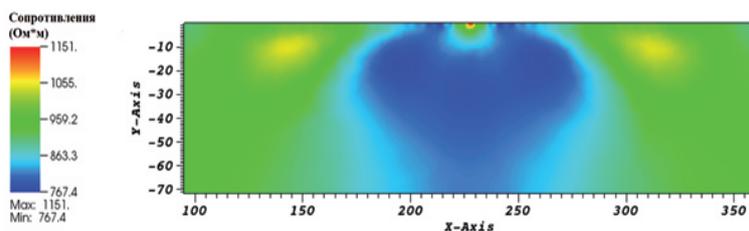


Рис. 7. Результат решения задачи инверсии при автоматическом подборе параметра регуляризации методом L-кривых.

Алгоритм инверсии с указанными параметрами безошибочно определяет наличие скважины в центре области, однако боковые помехи, создаваемыми эффектом стекающего тока, никуда не исчезают. В результате мы наблюдаем как скважина диаметром 3 м создает помеху величиной примерно 100 м. Другими словами, подобласти, расположенные до 50 м левее и правее скважины, будут определяться со значительными искажениями, либо не определяться вовсе. Уменьшить влияние помехи можно уменьшив параметр регуляризации. Как сказано выше, это может привести к потере точности определяемых удельных сопротивлений подобластей, однако помеха шириной 100 м создает еще большую неточность значений сопротивлений внутри этой области. Результаты для $\lambda = 1$ показаны на рис. 8.

³<https://visit.llnl.gov>

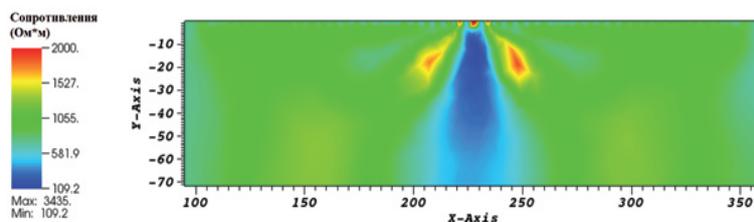


Рис. 8. Результат решения задачи инверсии при ручном подборе параметра регуляризации.

С помощью ручного подбора числа λ размер помехи удалось уменьшить до ~ 20 м в верхней зоне исследований и до ~ 40 м в нижней зоне. Еще большего уменьшения влияния скважины можно добиться, задав ее геометрию и электрические свойства непосредственно в решаемой модели. Данная возможность присутствует в ПК DiInSo, но в большинстве случаев у исследователя отсутствует подробная информация об исследуемом регионе.

Перейдем к последнему вычислительному эксперименту, цель которого показать важность правильного построения геометрии области решаемой задачи. Рассмотрим задачу электротомографии с расположением приемных и питающих электродов установки Веннер-Альфа на дне нескольких необсаженных скважин (рис. 9).

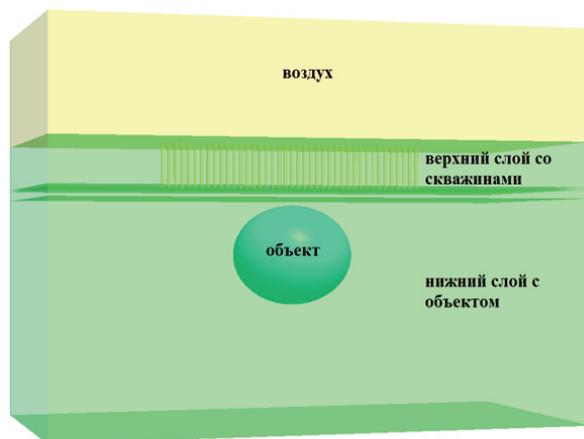


Рис. 9. Трехмерная модель области моделирования прямой задачи электротомографии.

Глубина скважин — 40 м, диаметр скважин — 3 м, расстояния между центрами скважин и, соответственно, электродами — 5 м. Сама среда представляет из себя два слоя, первый из которых имеет мощность 50 м от поверхности земли и удельное сопротивление 10 Ом·м, второй слой находится глубже, уходит в бесконечность и имеет сопротивление 100 Ом·м. Таким образом, относительно электродов, находящихся на дне скважин, первый слой имеет мощность лишь 10 м. Пусть внутри второго слоя находится объектом с очень малым сопротивлением близким к нулю, имеющим форму шара диаметром 90 м, верхний край которого находится на глубине 55 м

от поверхности земли или 15 м от электродов. Значения удельных сопротивлений подобластей модели специально выбраны таким образом, чтобы усложнить обнаружение шарообразного объекта. Обратим внимание, что несмотря на внешнюю схожесть с задачами скважинной электротомографии, представленная задача таковой не является, поскольку в скважинном методе электроды располагаются по всей глубине скважины и исследования проводятся преимущественно между скважинами, тогда как в нашем случае целью поиска является объект ниже скважин. Другими словами, это классическая задача электротомографии с топографическим эффектом. Основной сложностью данной постановки для современных ПК решения задач электротомографии является наличие резких перепадов в 90 градусов по глубине, требующих создания сильно неструктурированной сетки, использование которой прямо запрещено в широко разрекламированных ПК в силу использования в их моделях упрощенных сеток⁴. В ПК DiInSo, напротив, разрешено использование неструктурированных сеток, поэтому мы можем задавать области практически любой геометрической сложности. Например, для описанной задачи со скважинами треугольная сетка будет иметь вид, представленный на рис. 10.

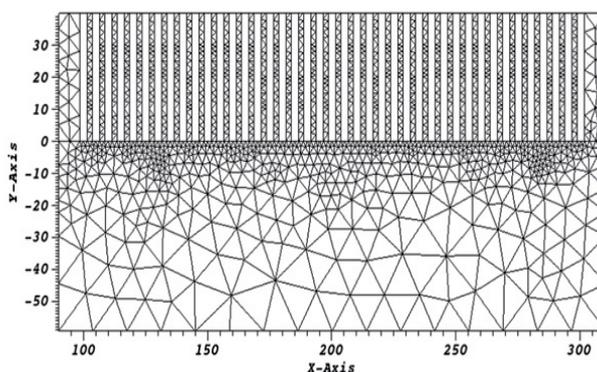


Рис. 10. Неструктурированная треугольная сетка, построенная для решения задачи инверсии в программе DiInSo.

Отсутствие возможности задавать неструктурированные сетки в других ПК заставляет пользователя идти на упрощения решаемой модели. Например, в нашем случае мы можем попробовать проигнорировать наличие сложной геометрии и решить задачу так, как если бы электроды находились не на дне скважин, а на поверхности земли. На рис. 11 представлены результаты решения задачи инверсии для упрощенной и естественной моделей. Область выше электродов убрана для удобства восприятия, так как мы проводим исследование наземной, а не скважинной электротомографии.

Факт наличия объекта присутствует в том числе в упрощенной модели, однако если бы мы не знали заранее, что это объект шарообразной формы, то могли бы подумать, что в области исследования находится либо сильно вытянутый объект, либо дополнительный слой. Использование точной геометрии

⁴http://nemfis.ru/pdf/ERTLab_documentation_Russian.zip

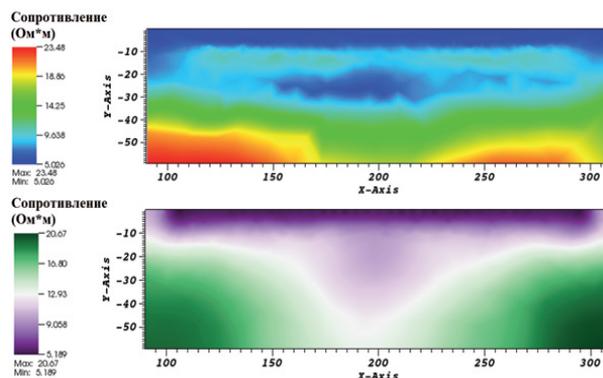


Рис. 11. Результаты инверсии для упрощенной геометрической модели (сверху) и для модели, содержащей точную геометрию области (снизу).

позволяет нам получить четкие очертания объекта. Его размеры оказываются несколько меньше реальных. Это связано с недостаточным количеством электродов или, в нашем случае, недостаточным количеством скважин, увеличение числа которых необходимо для проведения исследований на всю глубину залегания объекта. Также мы можем наблюдать заниженные значения удельных сопротивлений. Это связано с тем, что КС были рассчитаны по формуле (15), которая, вообще говоря, несправедлива для задач со сложной топографией. Для корректировки КС требуется проведение дополнительных исследований, которые находятся за рамками данной статьи и в рассмотренной работе не представляют интереса, так как влияют только на итоговые значения удельных сопротивлений, в то время как нас больше волнует геометрия подобъектов. К слову, для простой топографии с перепадами по высоте до ~ 30 градусов ПК DiInSo может выполнять перерасчет КС автоматически.

III Заключение

В статье был рассмотрен ПК DiInSo, предназначенный для решения прямых и обратных задач электротомографии. ПК был разработан на основе хорошо зарекомендовавших себя научных трудов и открытых программных кодов, включая работы автора. Особенностью DiInSo является сочетание удобства интерфейса для начинающего пользователя и гибкости настроек алгоритма инверсии для опытного пользователя. Использование треугольных и тетраэдральных сеток при моделировании позволяет не ограничивать пользователя в геометрических постановках, а возможность решать прямые задачи с объектами выше границы «земля-воздух» существенно расширяет круг допустимых задач. В качестве вычислительных примеров продемонстрированы три класса задач во многом уникальных именно для данного ПК. В первом из них показана важность учета объектов выше границы «земля-воздух», во втором — необходимость понимания теории обратных задач и невозможность решения многих проблем с помощью

«автоматики» и, наконец, в третьем — преимущество использования нерегулярных сеток для решения задач электротомографии. 32-битная полнофункциональная версия ПК DiInSo находится в свободном доступе по адресу <https://diinso.sourceforge.io> в виде установочного файла или архива.

Автор работы выражает благодарность лаборатории геоэлектрики, а также всему ИНГГ СО РАН, за помощь в отладке программы DiInSo, интересные идеи и сложные тестовые задачи.

Литература

1. *Мариненко А.В., Эпов М.И., Оленченко В.В.* Решение прямых задач электротомографии для сред с высокопроводящими неоднородностями сложной формы на примере кустовой площадки месторождения // Сибирский журнал индустриальной математики — 2019 — Т. XXII — № 1(77) — С. 63-73.
2. *Rucker C.* Advanced Electrical Resistivity Modelling and Inversion using Unstructured Discretization // Dissertation, Leipzig, 2011. — 121 p.
3. *Стрэттон Д.А.* Теория электромагнетизма. — Москва: Издательство технико-теоретической литературы, 1948 — 539 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 543 с.
5. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
6. *Баландин М.Ю., Шурина Э.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. — Новосибирск: Издательство НГТУ, 2000. — 70 с.
7. *Доброхотова И.А., Новиков К.В.* Электроразведка // Учебное пособие для студентов заочного обучения. — М.: изд-во РГГРУ, 2009. — 54 с.
8. *Friedel S.* Resolution, stability and efficiency of resistivity tomography estimated from a generalized inverse approach. // Geophys. J. Int., №153(2), 2003. — pp. 305-316.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е. — 284 с.
10. *Park S.K., Van G.P.* Inversion of pole-pole data for 3-d resistivity structure beneath arrays of electrodes. // Geophysics, №56, 1991. — pp. 951-960.
11. *Geselowitz D.B.* An Application of Electrocardiographic Lead Theory to Impedance Plethysmography. // IEEE Trans. Biomed. Eng., BME-18(1), 1971. — pp. 38-41.

12. *Sasaki Y.* Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data. // *Geophysics*, №54, 1989. — pp. 254-262.
13. *Kemna A.* Tomographic inversion of complex resistivity. // PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 2000. — 176 p.
14. *Gunther T.* Inversion Methods and Resolution Analysis for the 2D/3D Reconstruction of Resistivity Structures from DC Measurements. // PhD thesis, Freiberg University of Mining and Technology, 2004. — 150 p.
15. *Haber E.* Quasi-Newton methods for large-scale electromagnetic inversion problems. // *Inverse Probl.*, №21, 2005. — pp. 305-323.
16. *Johnston P.R.* Computational Inverse Problems in Electrocardiology. // WIT Press, 2001. — 304 p.
17. *Сергеев К.С., Рыжков В.И. и др.* Изучение многолетнемерзлых пород с использованием комплекса методов инженерной геофизики (на примере кустовой площадки нефтегазо-конденсатного месторождения в Западной Сибири) // *Журнал <Инженерные изыскания>*, №10-11/2015, С. 46-53.