

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ ЗЕМЛЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ТОКОВЫМ ЛИСТОМ

© 1998 г. В. С. Могилатов

ИГФ СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию 15.04.96 г.

Рассматривается устанавливаемое поле, возбуждаемое синхронным изменением произвольного распределения стороннего тока, сосредоточенного на дневной поверхности или на любой другой границе горизонтально-слоистого разреза. Поле в общем случае представляется в виде двух составляющих, возбуждаемых индуктивным и гальваническим путями (М-поле и Е-поле, М-мода и Е-мода, ТЕ-поле и ТМ-поле и т.д.). Эти составляющие соответствуют переходным процессам двух типов, вклад каждого из которых в суммарное поле зависит от разных свойств распределения стороннего тока. Вклад составляющей, возбуждаемой индуктивным путем, определяется ротором распределения стороннего тока, а вклад компоненты, возбуждаемой гальванически – дивергенцией. Как примеры, из общих выражений получены описания полей чисто индуктивного источника (петля), чисто гальванического (круговой электрический диполь) и смешанного (горизонтальный электрический диполь). Математическое описание процесса установления дается двумя способами, приводящими к интегралу Фурье и (при некоторых ограничениях) к ряду Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с введением в теорию и практику электроразведочного метода источника нового типа, неиндуктивного источника, а именно кругового электрического диполя (КЭД) [1, 2], в этой работе предпринимается попытка обобщить и унифицировать математический аппарат индукционных методов электроразведки, в особенности, метода зондирования становлением поля, с целью единого описания полей всех наземных источников, включая и КЭД.

Лейтмотивом нашего подхода здесь является четкое разделение поля произвольного (мы, впрочем, ограничились произвольным двухмерным горизонтальным распределением стороннего тока) возбудителя на две фактически независимые фракции. Разумеется, сам факт давно известен, сошлемся здесь, например, на весьма общие работы В.И. Дмитриева [3], Л.А. Табаровского [4] и Б.С. Светова [5].

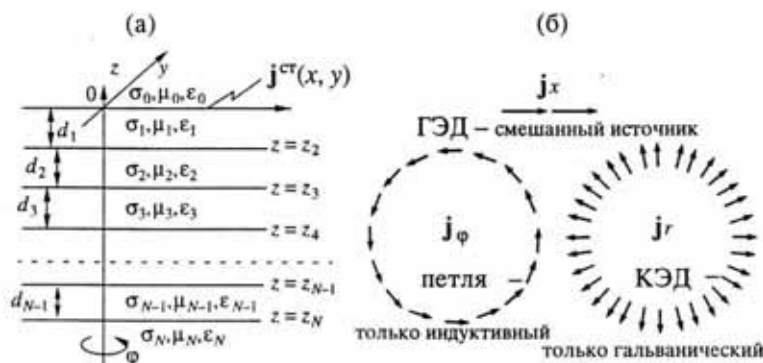
Поясняя наш подход, мы можем сказать, что незаземленная петля есть чисто индуктивный источник, возбуждающий в слоистой Земле только ТЕ-поле (transverse electric), КЭД есть чисто гальванический источник, возбуждающий ТМ-поле (transverse magnetic), наконец, горизонтальный электрический (заземленный) диполь есть смешанный источник, фактически составленный из трехтокового отрезка (индуктивный источник) и двух точечных заземлений (гальванические источники).

Математическое описание процессов установления для различных источников мы предлагаем,

используя два метода. Первый вполне традиционен и дает решение в виде интеграла Фурье, численная реализация которого давно освоена (в квазистационарном приближении). Однако здесь, в квазистационарном приближении, мы развиваем и другой подход, впервые предложенный А.Н. Тихоновым в [6]. Этот способ имеет ограничения по проводимости основания (изолирующее или идеально проводящее) и приводит к ряду Фурье. Это решение в виде ряда чрезвычайно удобно для получения асимптотических выражений на поздних временах установления в средах с изолирующим основанием. Именно эти выражения позволяют наглядно оценить весьма принципиальные различия между процессом, возбуждаемым индуктивным путем (ТЕ-процесс) и гальваническим (ТМ-процесс). Численная реализация решения в виде ряда Фурье, конечно, имеет свои трудности, вполне преодолимые. Мы имеем опыт создания синтезированного программного обеспечения для зондирования становлением с разными источниками, при использовании этих двух подходов (интеграл и ряд Фурье), что весьма удобно во многих отношениях.

СРЕДА, ВОЗБУЖДЕНИЕ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Примем геоэлектрическую модель, изображенную на рисунке. Все многообразие различных питающих установок, располагаемых на дневной поверхности ($z = z_1 = 0$) или на любой другой из границ ($z = z_i$) и образованных отрезками провода и заземлениями, мы можем формально



Модель среды, система координат и три типа возбудителей.

описать, введя распределение поверхностной плотности (в А/м) стороннего тока, меняющегося синхронно — $j^{ct}(x, y)q(t)$. В каждом однородном слое ($i = 0, 1, \dots, N$) мы должны решить систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \sigma_i \mathbf{E} + \epsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4)$$

На границах между слоями непрерывны горизонтальные компоненты поля (H_x, H_y, E_x, E_y). На границе, которая содержит поверхностный сторонний ток (допустим, что это l -я граница, при $z = z_l$), должны выполняться особые условия, которые являются следствием первого уравнения (1):

$$\begin{aligned} [H_x]_{z=z_l} &= j_y^{ct}(x, y)q(t), \\ [H_y]_{z=z_l} &= -j_x^{ct}(x, y)q(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$[E_x]_{z=z_l} = 0,$$

$$[E_y]_{z=z_l} = 0.$$

Здесь и далее $[F]_{z=z_l}$ обозначает скачок функции F при переходе границы $z = z_l$. Заметим, что, принимая (5) в таком виде, мы пренебрегаем влиянием материального носителя стороннего тока, как части геоэлектрической среды.

Уменьшим число неизвестных функций в задаче (1)–(5), сведя задачу к определению вертикальных компонент поля (известный прием, например, [4]). Из (1)–(4) можно получить следующие выражения горизонтальных компонент через вертикальные:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma_i E_z + \epsilon_i \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_i \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (9)$$

Поставим теперь задачу для E_x и H_z . Они должны в каждом слое удовлетворять уравнению

$$\Delta F = \mu_i \sigma_i \frac{\partial F}{\partial t} + \mu_i \epsilon_i \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (10)$$

на границах ($z = z_i, i = 1, 2, \dots, N$), учитывая (5)–(9), имеем:

$$\begin{aligned} \left[\sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{z=z_l} &= \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right]_{z=z_l} = \\ &= \begin{cases} -\text{div} j^{ct}(x, y)q(t), & i = l \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial z} \right]_{z=z_l} = 0, \quad (12)$$

$$[\mu H_z]_{z=z_l} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H_z}{\partial z} \right]_{z=z_l} &= -\left[\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right]_{z=z_l} = \\ &= \begin{cases} -\text{rot}_z j^{ct}(x, y)q(t), & i = l \\ 0, & i \neq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

К условиям (10)–(14) необходимо также добавить условия излучения для функций E_z, H_z .

Теперь мы можем заметить, что уже получили важный результат. Свою задачу с произвольным плоским источником мы свели к двум скалярным независимым задачам, которые совершенно по

разному зависят от заданного распределения стороннего тока.

Решаем эти задачи разделением переменных. Поскольку наша задача в целом не обладает какой-либо симметрией (распределение $j^{CT}(x, y)$ пока произвольно), разделяем переменные, используя двумерное преобразование Фурье по координатам x и y , которое определяется следующим образом:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta, z) e^{i\xi x} e^{i\eta y} d\xi d\eta, \quad (15)$$

$$f^*(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy. \quad (16)$$

В осесимметричном варианте, когда функция f зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, пара двойных преобразований Фурье эквивалентна паре преобразований Ганкеля:

$$f(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f^*(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (17)$$

$$f^*(\lambda, z) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r, z) J_0(\lambda r) r dr, \quad (18)$$

где $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Нетрудно видеть, что, определяя

$$E_z^*(z, t, \xi, \eta) = \frac{1}{2\sigma_i} V(z, t, \lambda) D^*(\xi, \eta), \quad (19)$$

$$H_z^*(z, t, \xi, \eta) = \frac{1}{2\lambda} X(z, t, \lambda) R^*(\xi, \eta),$$

где

$$D^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} j^{CT}(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy, \quad (20)$$

$$R^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rot}_z j^{CT}(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy, \quad (21)$$

мы сводим задачу к нахождению двух совершенно независимых друг от друга и от конфигурации источника функций X и V , которые в каждом ($i = 0, 1, \dots, N$) однородном слое удовлетворяют одному и тому же уравнению, но разным условиям на границах ($z = z_i, i = 1, 2, \dots, N$):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \lambda^2 F = \mu_i \sigma_i \frac{\partial F}{\partial t} + \mu_i \epsilon_i \frac{\partial^2 F}{\partial t^2};$$

а) для функции X

б) для функции V

$$[\mu X]|_{z=z_i} = 0,$$

$$\left[V + \frac{\epsilon \partial V}{\sigma \partial t} \right] \Big|_{z=z_i} = \begin{cases} -2q(t), & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases};$$

$$[X'_z] \Big|_{z=z_i} = \begin{cases} -2\lambda q(t), & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases},$$

$$[V'_z / \sigma] \Big|_{z=z_i} = 0; \quad (22)$$

$$X \rightarrow 0, \quad V \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Эти краевые задачи мы будем решать ниже. Сейчас обсудим общий вид решения (Фурье-образ) для всех компонент. Применяя преобразование Фурье к равенствам (6)–(9) и выражая образы горизонтальных компонент через образы вертикальных, получим, что в каждом слое:

$$H_x^* = \frac{\eta}{2} \left[V + \frac{\epsilon_i \partial V}{\sigma_i \partial t} \right] D^* + \frac{\xi}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial z} R^*, \quad (23)$$

$$H_y^* = -\frac{\xi}{2} \left[V + \frac{\epsilon_i \partial V}{\sigma_i \partial t} \right] D^* + \frac{\eta}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial z} R^*, \quad (24)$$

$$H_z^* = \frac{1}{2\lambda} X R^*, \quad (25)$$

$$E_x^* = \frac{\xi}{2\sigma_i} \frac{\partial V}{\partial z} D^* - \frac{\eta \mu_i}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial t} R^*, \quad (26)$$

$$E_y^* = \frac{\eta}{2\sigma_i} \frac{\partial V}{\partial z} D^* + \frac{\xi \mu_i}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial t} R^*, \quad (27)$$

$$E_z^* = \frac{1}{2\sigma_i} V D^*, \quad (28)$$

где $\bar{\xi} = \frac{i\xi}{\lambda^2}$, $\bar{\eta} = \frac{i\eta}{\lambda^2}$, $i = 0, 1, \dots, N$. Таким образом,

поведение поля со временем описывается двумя независимыми функциями, V и X , разного типа. Иначе говоря, процесс установления поля произвольного источника есть суперпозиция двух различных процессов. Вклад каждого процесса определяется коэффициентами D^* и R^* , т.е., согласно (20) и (21), конфигурацией источника (стороннего тока) посредством значений функций $\text{div } \mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y)$ и $\text{rot } \mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y)$. Понятно, вспоминая физический смысл дивергенции и ротора, что одна составляющая определяется стоками или, в нашем случае, током, стекающим (втекающим) с заземлений (возбуждается гальваническим путем), а другая составляющая зависит от вихревой компоненты в распределении стороннего тока (возбуждается индуктивным путем). Пользуясь полученным представлением решения для произвольного источника, мы можем целенаправленно изменять конфигурацию источника, добиваясь подавления гальванической компоненты или индуктивной. Впрочем, подавление гальванической составляющей процесса, причем полное (всюду $\text{div } \mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y) = 0$), давно известно и применяется – это незаземленный контур с током. Но мы можем рассматривать и менее известные конфигурации источника, для которых $\text{rot } \mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y) = 0$ и которые, таким образом, инициируют процесс установления чисто гальваническим образом.

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ПРИМЕРЫ

Токовая петля

Возьмем такой особый случай, как распределение стороннего тока с азимутальной симметрией. В этом случае также имеется много возможностей, но мы примем, что в полярной системе координат имеется только $j_{\varphi}^{\text{ct}}(r)$, причем $j_{\varphi}^{\text{ct}}(r) = I\delta(r-a)$. Это значит, что мы рассматриваем круглую (радиус a) токовую петлю. В таком случае, в цилиндрической системе координат получим:

$$\text{div } \mathbf{j}^{\text{ct}} = \frac{1}{r} \frac{\partial j_{\varphi}^{\text{ct}}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{j}^{\text{ct}} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{\varphi}^{\text{ct}})}{\partial r} = I[\delta(r-a)/r + \delta'(r-a)].$$

Следовательно, $D^* = 0$ и этот источник – чисто индуктивный (конечно, мы это подозревали).

Что касается функции R^* , то, воспользовавшись азимутальной симметрией и перейдя от преобразований Фурье (15)–(16) к преобразованиям Ганкеля (17)–(18), а также вспоминая определе-

ние дельта-функции Дирака и ее производных, получим

$$R^* = 2\pi I \int_0^{\infty} [\delta(r-a)/r + \delta'(r-a)] J_0(\lambda r) r dr = \\ = 2\pi I \lambda a J_1(\lambda a). \quad (29)$$

Нетрудно видеть, учитывая (23)–(28), что в цилиндрической системе координат отличны от 0 компоненты H_r , H_z и E_{φ} . Например, компонента E_{φ} представится в следующем виде:

$$E_{\varphi}(r, z, t) = \frac{M_z \mu_i}{2\pi a} \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a) \frac{\partial X(z, t, \lambda)}{\partial t} d\lambda, \quad (30)$$

где $M_z = I\pi a^2$ – определяется, как момент источника. В теории обычно рассматривается петля бесконечно малого радиуса, но с конечным моментом – вертикальный магнитный диполь (ВМД). В этом случае $J_1(\lambda a) = \lambda a/2$ и (30) примет вид

$$E_{\varphi}(r, z, t) = \frac{M_z \mu_i}{4\pi} \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) \lambda \frac{\partial X(z, t, \lambda)}{\partial t} d\lambda. \quad (31)$$

Гальванический (неиндуктивный) источник

Построим теперь такой источник, который возбуждал бы поле только гальваническим путем. Мы должны потребовать, чтобы $R^* \equiv 0$ или на всей плоскости $z = 0$ (в полярной системе координат)

$$\text{rot } \mathbf{j}^{\text{ct}} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r j_{\varphi}^{\text{ct}})}{\partial r} - \frac{\partial j_r^{\text{ct}}}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad (32)$$

Очевидное решение – это осесимметричное распределение стороннего тока, имеющего только радиальную компоненту $j_r^{\text{ct}}(r)$. Зависимость от r формально может быть любой, но пока примем элементарную модель. Пусть плотность стороннего тока (меняющегося синхронно, как $q(t)$), отлична от 0 только вблизи окружности радиуса r_0 (рисунк, б), т.е.

$$j_r^{\text{ct}}(r) = \\ = \frac{I}{2\pi r} [U(r-r_0+dr_0/2) - U(r-r_0-dr_0/2)], \quad (33)$$

где $U(x)$ – функция Хевисайда. Такая конфигурация стороннего тока позволяет говорить о радиальном способе возбуждения. Будем называть такой источник круговой электрический диполь (КЭД). Получим конкретное решение для компонент устанавливающегося поля, возбуждаемого таким источником.

В соответствии с предлагаемыми нами алгоритмом, мы должны сначала рассмотреть

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{CT}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_r^{\text{CT}})}{\partial r} = \\ &= \frac{I}{2\pi r} [\delta(r - r_0 + dr_0/2) - \delta(r - r_0 - dr_0/2)]. \end{aligned} \quad (34)$$

Наш источник таков, что дивергенция поверхностной плотности тока повсюду равна 0, кроме точек двух концентрических окружностей (точек заземления), где дивергенция принимает бесконечные значения. Заметим, что между этими окружностями, в области, где протекает радиальный ток, дивергенция также равна 0 (как и ротор). Можно сказать, что источник возбуждения в этом случае — именно заземления (или ток, стекающий с них), в отличие от петли, где магнитное поле тока возбуждает поле, а заземлений нет. В другой форме можно сказать, что такая система токов не имеет собственного магнитного поля (и носитель-проводник — собственной индуктивности).

Итак, далее мы должны определить функцию D^* . При $dr_0/r_0 \rightarrow 0$ можно заменить в (34) разность дифференциалом и мы получаем:

$$\begin{aligned} D^*(\lambda) &= 2\pi \int_0^\infty \operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{CT}} J_0(\lambda r) r dr = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \left[\frac{I dr_0}{2\pi r} \delta(r - r_0) \right] J_0(\lambda r) r dr = I dr_0 \lambda J_1(\lambda r_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Наконец, в цилиндрической системе координат мы получим следующие выражения для ненулевых компонент поля КЭД в i -том слое:

$$\begin{aligned} H_\varphi(r, z, t) &= -\frac{I dr_0}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda r_0) \times \\ &\times \left[V(z, t, \lambda) + \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} \frac{\partial V(z, t, \lambda)}{\partial t} \right] \lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (36)$$

$$E_r(r, z, t) = -\frac{I dr_0}{4\pi \sigma_i} \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda r_0) \frac{\partial V(z, t, \lambda)}{\partial z} \lambda d\lambda, \quad (37)$$

$$E_z(r, z, t) = \frac{I dr_0}{4\pi \sigma_i} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) V(z, t, \lambda) \lambda^2 d\lambda. \quad (38)$$

Таким образом, поле КЭД ортогонально полю петли. Употребительно определение для поля петли — поперечно-электрическое поле или ТЕ-поле и, значит, поле КЭД — поперечно-магнитное или ТМ-поле.

Источник, который мы сейчас рассматриваем, является физической идеализацией. Практически его можно реализовать радиально располагаемыми отрезками проводов конечной длины, заземляемых на концентрических окружностях с радиусами a и b . В таком случае необходимо проинтегрировать, например, (37) по r_0 и мы получим для E_r :

$$\begin{aligned} E_r(r, z, t) &= \frac{I}{4\pi \sigma_i} \int_0^\infty J_1(\lambda r) [J_0(\lambda b) - J_0(\lambda a)] \times \\ &\times \frac{\partial V(z, t, \lambda)}{\partial z} d\lambda. \end{aligned} \quad (39)$$

Удобно, конечно, использовать такой источник с точечным центральным заземлением, т.е. $a = 0$. Если при этом мы положим $b = \infty$, то можно рассматривать выражение (39), как устанавливающее электрическое поле, возбуждаемое точечным заземлением.

Смешанный источник

Рассмотрим, наконец, и такой классический источник устанавливающегося электромагнитного поля, как заземленная горизонтальная электрическая линия или диполь. Возьмем короткую линию с током I , заземленную в точках по оси x при $x = -dx_0/2$ и при $x = dx_0/2$. Таким образом, сторонний ток имеет только компоненту j_x^{CT} , причем

$$j_x^{\text{CT}}(x, y) = I \delta(y) [U(x + dx_0/2) - U(x - dx_0/2)].$$

Или для диполя с моментом $I dx_0$:

$$j_x^{\text{CT}}(x, y) = I dx_0 \delta(y) \delta(x).$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{CT}} = I dx_0 \delta(y) \delta'(x), \quad (40)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{j}^{\text{CT}} = -I dx_0 \delta'(y) \delta(x). \quad (41)$$

Затем определяем

$$D^* = I dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \delta'(x) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy = I dx_0 i\xi, \quad (42)$$

$$R^* = -I dx_0 i\eta. \quad (43)$$

Наконец, согласно (23)–(28) и (15)–(18), получим выражения для всех компонент нестационарного поля горизонтального электрического диполя:

$$H_x = I dx_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \hat{L} \left(\frac{V}{\lambda} + \frac{\epsilon_i V'_i}{\sigma_i \lambda} - \frac{X'_z}{\lambda^2} \right),$$

$$H_y = -I dx_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{L} \left(\frac{V}{\lambda} + \frac{\epsilon_i V'_i}{\sigma_i \lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{L} \left(\frac{X'_z}{\lambda^2} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 H_z &= Idx_0 \frac{\partial}{\partial y} \hat{L}(X), \\
 E_x &= Idx_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{L} \left(\frac{V'_z}{\sigma_i \lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{L} \left(\frac{\mu_i X'_i}{\lambda^2} \right) \right], \\
 E_y &= Idx_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \hat{L} \left(\frac{V'_z}{\sigma_i \lambda} - \frac{\mu_i X'_i}{\lambda^2} \right), \\
 E_z &= -Idx_0 \frac{\partial}{\partial x} \hat{L} \left(\lambda \frac{V}{\sigma_i} \right),
 \end{aligned} \quad (44)$$

где $\hat{L}$ – интегральный оператор

$$\hat{L}(F) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) F(\lambda) d\lambda,$$

а функции X , V удовлетворяют краевым задачам (22), которые мы и будем решать в следующем разделе.

ДВА СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ

Краевые задачи (22) решаем, продолжая разделять переменные. Функции X и V будем искать, как суперпозицию решений вида $Z(z) \exp(-\alpha z)$, где $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Функцию Z определим, как $Z(z) = A\zeta(z)$ над границей со сторонним током ($z \geq z_i$) и $Z(z) = B\zeta(z)$ под границей. Функция ζ в i -м слое может быть выражена через свои же значения (внутренние) на нижней или на верхней границе слоя. Обозначая $\zeta_i = \zeta(z_i)$, $\zeta'_i = \zeta'_z(z_i)$, ($i = 1, 2, \dots, N$), имеем в каждом слое ($z_i \geq z \geq z_{i+1}$):

$$\begin{aligned}
 \zeta(z) &= \zeta_i \exp(-u_0 z), \quad z \geq 0 \text{ (в воздухе)}, \\
 \zeta(z) &= \zeta_i \operatorname{ch}[u_i(z - z_i)] + \frac{\zeta'_i}{u_i} \operatorname{sh}[u_i(z - z_i)],
 \end{aligned} \quad (45)$$

или

$$\begin{aligned}
 \zeta(z) &= \zeta_{i+1} \operatorname{ch}[u_i(z - z_{i+1})] + \frac{\zeta'_{i+1}}{u_i} \operatorname{sh}[u_i(z - z_{i+1})], \\
 \zeta(z) &= \zeta_N \exp[u_N(z - z_N)], \quad z \leq z_N.
 \end{aligned}$$

Здесь $u_i^2 = \lambda^2 + k_i^2$, $k_i^2 = -\alpha \mu_i \sigma_i + \alpha^2 \mu_i \epsilon_i$, ($i = 0, 1, \dots, N$). При переходе простой границы непрерывны функции

а) для X б) для V

$$f = \mu \zeta \text{ и } h = \zeta'_z / \lambda, \quad h = \left(1 - \frac{\alpha \epsilon}{\sigma}\right) \zeta \text{ и } f = \zeta'_z / \sigma. \quad (46)$$

На этом этапе следует уточнить вид параметра α . Обычно его берут в виде $i\omega$ и функции X и V представляются интегралом Фурье:

$$\begin{Bmatrix} X \\ V \end{Bmatrix} = \hat{F}(Z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(z) e^{-i\omega z} d\omega. \quad (47)$$

Находим функцию Z , имея источник на l -й границе и определяя коэффициенты A и B при учете условий на этой границе, согласно (22), относимых теперь к функции Z :

$$Z(z) = \frac{2Q(\omega) \hat{f}_l}{\hat{f}_l \hat{h}_l - \hat{f}_i \hat{h}_i} \zeta(z), \quad (48)$$

$z \geq z_l$ (над источником),

$$Z(z) = \frac{2Q(\omega) \hat{f}_i}{\hat{f}_i \hat{h}_i - \hat{f}_l \hat{h}_l} \zeta(z), \quad (49)$$

$z \leq z_l$ (под источником).

Здесь акцент ($\sim$) означает, что функция определяется над источником, последовательно сверху вниз по формулам (45)–(46), причем значение ζ_l (на верхней стороне первой границы) – произвольно. Соответственно, акцент ($\sim$) означает, что функция определяется снизу, с нижней стороны последней границы. Индекс указывает, что берется значение на соответствующей границе. Функция $Q(\omega)$ есть трансформанта функции, описывающей форму возбуждающего импульса, т.е. $q(t) = \hat{F}(Q)$. Для мгновенного включения имеем, в частности, $Q(\omega) = 1/(-i\omega)$. Если $q(t) = \exp(-i\omega_0 t)$ (т.е. $Q(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$), мы получаем гармоническое решение для частоты ω_0 .

Фактически, мы здесь в несколько необычной последовательности в разделении переменных использовали обычный способ решения задачи о становлении, известный как “решение в частотной области”. Наиболее основательно он был предложен в [7] и получил большое развитие в дальнейшем (например, [8, 9]). Проблемы численной реализации этого алгоритма решены, но только в квазистационарном приближении. При учете токов смещения возможность численной реализации преобразования Фурье резко ухудшается.

В квазистационарном приближении мы можем предложить и другое решение краевых задач (22), которое впервые использовал А.Н. Тихонов в [6]. Если токами смещения пренебречь и принять верхнее (воздух) и нижнее полупространства изолирующие, то решение в этих областях для функций X и V есть $F(z) = C \exp(-\lambda|z|)$ и задачи для X и V ограничиваются по z ($0 \geq z \geq z_N$) путем заменой граничных условий при $z = 0$ и $z = z_N$ замыкающими условиями. Сначала решаем задачу для режима выключения (при $t = 0$), сводя к задаче с на-

чальным условием. При этом получим вместо (22) следующие задачи для функций X и V :

а) для функции X б) для функции V

$$\begin{aligned} X''_{zz} - \lambda^2 X &= \mu_i \sigma_i \frac{\partial X}{\partial t}, & V''_{zz} - \lambda^2 V &= \mu_i \sigma_i \frac{\partial V}{\partial t}, \\ X'_z + \lambda \frac{\mu_1}{\mu_0} X &= 0, & V &= 0, \quad z = 0, \\ [\mu X]|_{z=z_i} &= 0, & [V]|_{z=z_i} &= 0, \\ [X'_z]|_{z=z_i} &= 0, & [V'_z/\sigma_i]|_{z=z_i} &= 0, \quad (50) \\ X'_z - \lambda \frac{\mu_{N-1}}{\mu_N} X &= 0, & V &= 0, \quad z = z_N, \\ X &= \bar{X}(\lambda, z), & V &= \bar{V}(\lambda, z), \quad t = 0, \end{aligned}$$

где $i = 2, \dots, N-1$, а $\bar{X}(\lambda, z)$ и $\bar{V}(\lambda, z)$ – решения для постоянного тока. Заметим, что начальным условием для функции X является распределение (Фурье-образ) магнитного поля постоянного стороннего тока, а для функции V – распределение тока, стекающего в среду с заземлений.

В этом случае параметр α может принимать дискретный набор вещественных значений $\alpha_j \geq 0$ и решение для функций X и V представляется в виде ряда Фурье:

$$\begin{Bmatrix} X \\ V \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \zeta_j(z) T_j(t), \quad (51)$$

где $T_j = \exp(-\alpha_j t)$ для мгновенного выключения. Если же ток в источнике меняется, как $q(t)$, то

$$T_j = - \int_0^t q(\tau) \alpha_j \exp[-\alpha_j(t-\tau)] d\tau.$$

Функции ζ_j последовательно определяем сверху вниз, положив $\zeta'_{j1} = \lambda$, с учетом (45) и удовлетворяя граничным условиям в (50). Условия на нижней границе являются уравнениями для определения α_j . В случае сверхпроводящего основания условие на нижней границе для функции X есть $\zeta_{jN} = 0$.

Коэффициенты C_j определяем при удовлетворении начальных условий для функций X и V и пользуясь ортогональностью функций $\mu \sqrt{\sigma} \zeta_j$ для X и $\sqrt{\mu} \zeta_j$ для V в области $0 \leq z \leq z_N$. Также мы учтем, что функции $\bar{X}(\lambda, z)$ и $\bar{V}(\lambda, z)$ удовлетворяют уравнению

$$F''_{zz} - \lambda^2 F = 0$$

и тем же условиям на границах, что и функции X, V . Итак,

а) для функции X б) для функции V

$$C_j = \frac{2\lambda f_{j1}}{\sum_{i=1}^{N-1} M_{ji} \mu_i^2 \sigma_i}, \quad C_j = \frac{2f_{j1}}{\sum_{i=1}^{N-1} M_{ji} \mu_i}, \quad (52)$$

где в каждом слое определяется

$$\begin{aligned} M_{ji} &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} [\zeta_j(z)]^2 dz = \\ &= \frac{1}{2u_{ji}^2} \left[d_i \left(\zeta_{ji}^2 u_{ji}^2 - [\zeta'_{ji}]^2 \right) + (\zeta_{ji+1} \zeta'_{ji+1} - \zeta_{ji} \zeta'_{ji}) \right], \end{aligned}$$

непрерывные функции f определены в (46), а $d_i = z_i - z_{i+1}$ – мощности слоев ($i = 1, 2, \dots, N-1$).

Заметим, что $u_{ji} = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_j \mu_i \sigma_i}$ может принимать мнимые значения, тогда вещественное гиперболическое решение (45) переходит в вещественное же тригонометрическое решение. Вещественная арифметика этого алгоритма позволяет создать весьма быстрые численные процедуры.

Итак, краевые задачи для функций X и V решены. Мы в весьма компактной форме привели здесь одномерный математический аппарат, с помощью которого можно построить алгоритм для расчета устанавливающегося поля произвольного источника на дневной поверхности (или на любой другой границе), притом двумя способами, совместное использование которых позволяет организовать универсальные надежные и быстрые вычислительные процедуры.

РАННЯЯ И ПОЗДНЯЯ СТАДИИ УСТАНОВЛЕНИЯ ТЕ И ТМ-ПРОЦЕССОВ

Поле ВМД и КЭД на сверхдлинных временах

Рассмотрим вначале поле вертикального магнитного диполя, помещенного на границе между двумя проводящими полупространствами ($\sigma_0, \epsilon_0, \mu_0$ и $\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1$). Пользуясь развитым выше аппаратом, нетрудно получить для компоненты E_φ известное (например, [8]) представление для поля установления ВМД в Земле с учетом токов смещения (включение):

$$\begin{aligned} e_\varphi(t) &= \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\frac{M_z \mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \frac{\lambda \exp(u_1 z)}{u_0 + u_1} d\lambda \right] d\omega, \end{aligned} \quad (53)$$

или (точка наблюдения также на дневной границе):

$$E_{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{(-i\omega)[(\sigma_0 - \sigma_1) - i\omega(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)]} \times \\ \times \left[\frac{M_z \mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \lambda (u_0 - u_1) d\lambda \right] d\omega, \quad (54)$$

где, напомним, $u_i = \sqrt{\lambda^2 + k_i^2}$, $k_i^2 = -i\omega\mu_0\sigma_i - \omega^2\mu_0\varepsilon_i$ ($i = 0, 1$). Далее, используя интеграл Зоммерфельда, функцию

$$f_i(t, R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-k_i R)}{k_i} e^{i\omega t} d\omega = \\ = c_i \exp\left(-\frac{\beta_i t}{2}\right) I_0\left(\frac{\beta_i}{2} \sqrt{t^2 - T_i^2}\right) U(t - T_i), \quad (55)$$

где $c_i = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_i}$ – скорость света в среде, $\beta_i = \sigma_i/(\varepsilon_i)$,

$T_i = R/c_i$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $U(t)$ – функции Хевисайда, играющую важную роль в задачах нестационарной (во временной области) геоэлектрики, и теорему о свертке, получим, наконец, что

$$E_{\varphi}(t) = \frac{M_z}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(t - \tau) \left(\frac{\partial f_0(\tau, R)}{\partial R} - \frac{\partial f_1(\tau, R)}{\partial R} \right) d\tau \right] \Bigg\}_{z=0}. \quad (56)$$

Здесь $\bar{G}(t) = [1 - \exp(-\bar{\beta} t)] U(t)/(\sigma_0 - \sigma_1)$, $\bar{\beta} = (\sigma_0 - \sigma_1)/(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$. После дифференцирования получим для режима выключения:

$$E_{\varphi}(t) = \frac{M_z \mu_0}{2\pi} (A_1 - A_0), \quad (57)$$

где

$$A_i = \frac{1}{\mu_0(\sigma_1 - \sigma_0)} \frac{T_i^2}{r^4} \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\tau) (I_i^{(2)} T_i - I_i^{(1)}) U(t - \tau) I(\tau - T_i) d\tau + \right. \\ \left. + \left[\varphi_i(T_i) \left(1 + \frac{\beta_i^2 T_i^2}{8} \right) - \varphi_i'(T_i) T_i \right] U(t - T_i) + \right. \\ \left. + \varphi_i(T_i) T_i \delta(t - T_i) \right\},$$

$$\varphi_i(\tau) = -\exp(-\beta_i \tau/2) \{ 1 + \beta_i \tau/2 + \\ + \exp[-\bar{\beta}(t - \tau)] (\bar{\beta} \tau - \beta_i \tau/2 - 1) \} / \tau^2,$$

$I_i^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial T_i^n} I_0(\beta_i \sqrt{\tau^2 - T_i^2})$ (I_0 – модифицированная функция Бесселя), а $\delta(x)$ – функция Дирака.

Раннюю стадию установления поля кругового электрического диполя получим в предположениях, что радиус КЭД мал в (39) ($a = 0$, $b \ll r$) и что $\sigma_0 = 0$ и $|\sigma_1 - i\omega\varepsilon_1| \gg \omega\varepsilon_0$. Для режима включения имеем:

$$E_{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{(-i\omega)(\sigma_1 - i\omega\varepsilon_1)} \times \\ \times \left[\frac{I b^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \lambda u_1 d\lambda \right] d\omega.$$

Сравнив это с (54), заключаем, что дальнейшие преобразования и результат достаточно очевидны.

Поздняя стадия ТЕ и ТМ-процессов

Что касается ТЕ-процесса (т.е., например, процесса установления, возбуждаемого петлей), то свойства его изучены очень хорошо и широко известны. Характернейшей особенностью поздней стадии является зависимость поля лишь от интегрального показателя среды – суммарной продольной проводимости. Получим для сравнения выражение для поздней стадии процесса установления поля КЭД, помещенного на дневной поверхности двухслойного разреза с изолирующим основанием. Воспользуемся выражением для E_r (39) ($a = 0$). В поздней стадии достаточно принять квазистационарное приближение, и мы, таким образом, можем применить представление для функции V в виде ряда Фурье (51). Для получения асимптотических выражений, справедливых в поздней стадии установления, существует рецепт, данный еще в работе [6]. В поздней стадии (при $t \rightarrow \infty$) достаточно взять только первый член ряда (51) и рассмотреть его при $\lambda \rightarrow 0$. Приводим результат для радиального градиента на дневной поверхности:

$$E_r(t) = \frac{I_0}{4\pi\sigma d^2} \left(\frac{b}{d} \right)^2 \frac{r}{d} \left(\frac{\sigma\mu_0 d^2}{2t} \right)^2 \times \\ \times \exp\left(-\frac{\sigma\mu_0 r^2}{4t}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 t}{\sigma\mu_0 d^2}\right), \quad (58)$$

где d – мощность, а σ – проводимость слоя.

Таким образом, поведение ТМ-процесса в поздней стадии принципиально иное, чем поведе-

ние ТЕ-процесса. Сохраняется зависимость поля от вертикальной структуры георазреза. Если имеется изолирующая граница, спад экспоненциальный.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы уже говорили во Введении, основной целью этой работы являлось построение такого математического аппарата для описания поля произвольного плоского источника в слоистой Земле, который подчеркивал бы разделение этого поля на две независимые компоненты, возбуждаемые различным образом. При этом, в частности, мы единообразным способом получили описания полей традиционных источников (петля и линия), но также и чисто гальванического, неиндуктивного источника – кругового электрического диполя.

Свойства индуктивного источника (горизонтальной петли) хорошо известны. Заметим, что в силу более быстрого затухания ТМ-процесса (в средах с изолирующим основанием – экспоненциального) другой традиционный источник – горизонтальная заземленная линия, будучи смешанным источником, проявляет себя, в основном и в особенности в поздней стадии, как индуктивный. Свойства ТМ-процесса установления до сих пор мало изучались и мало использовались (в лучшем случае лишь как проблемы применения малопрактичной вертикальной электрической линии). Между тем, свойства эти в высшей степени интересны в режиме установления, тем более, что предложен реальный наземный способ возбуждения такого процесса в “чистом” виде – путем применения питающей установки КЭД. К наиболее замечательным свойствам поля такого процесса следует отнести отсутствие нормального (квазистационарного) магнитного поля на дневной поверхности горизонтально-слоистой среды, а также зависимость процесса на всех стадиях от вертикальной структуры геоэлектрического разреза (а не от суммарной продольной проводимости только, что характерно для процесса, возбуждаемого индуктивно).

Обычный прием интерпретации электромагнитных зондирований состоит в получении некоторых кажущихся параметров приближенной, более простой модели. Обычно реальная среда моделируется кусочно-однородной моделью. Однако “однородные” слои на самом деле более или менее случайным образом анизотропны. ТЕ и ТМ-процессы совершенно по разному “формиру-

ют” кажущиеся параметры. Именно, использование обеих этих процессов (а не только индуктивного) позволило бы более успешно изучать электромагнитные свойства реальных сред.

Наконец, заметим, что мы провели чисто электродинамический анализ. Это обычно достаточно при индуктивном возбуждении. Однако в случае гальванического возбуждения следует учитывать процессы вызванной поляризации как из-за воздействия интенсивного прямого тока, так и из-за характера вторичного ТМ-процесса (вертикальная компонента плотности тока). Это замечание не уничтожает значение вышеприведенного анализа. Именно, анализ процесса электродинамического установления чисто гальванического источника (КЭД) (его скоротечность, например) позволяет рекомендовать КЭД как новую интересную питающую установку при изучении процессов ВП.

Автор должен поблагодарить Дж.Р. Уэйта, дискуссия с которым по поводу установки КЭД и ТМ-возбуждения помогла сформировать много более общий взгляд на проблему, чем автор имел до того.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мозилатов В.С. Круговой электрический диполь – новый источник для электроразведки // Физика Земли. 1992. № 6. С. 97–105.
2. Мозилатов В.С., Балашихин Б.П. Зондирования вертикальными токами (ЗВТ) // Физика Земли. 1994. № 6. С. 73–79.
3. Дмитриев В.И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 55–65.
4. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975. 140 с.
5. Светов Б.С. Электродинамические основы квазистационарной геоэлектрики. М.: ИЗМИРАН, 1984. 183 с.
6. Тихонов А.Н., Скutareвская О.А. О становлении электрического тока в неоднородной среде. II // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1950. Т. XIV. № 4. С. 281–293.
7. Шейнман С.М. Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикладная геофизика. М.: Гостоптехиздат, 1947. Вып. 9. С. 3–55.
8. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М.: Недра, 1965. 109 с.
9. Уэйт Дж.Р. Геоэлектромагнетизм. М.: Недра, 1987. 235 с.