

Общероссийский математический портал

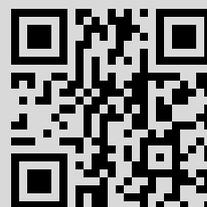
В. С. Могилатов, Г. А. Борисов, Возбуждение слоистых геоэлектрических сред гармоническим магнитным током, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2003, том 6, номер 1, 77–87

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 84.237.119.225

13 марта 2017 г., 11:41:56



## ВОЗБУЖДЕНИЕ СЛОИСТЫХ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД ГАРМОНИЧЕСКИМ МАГНИТНЫМ ТОКОМ

**В. С. Могилатов, Г. А. Борисов**

В приложении к геоэлектрике рассматриваются задачи об электромагнитном возбуждении слоистых (горизонтально- и цилиндрически-слоистой) сред сторонним магнитным током, в частности тороидальной катушкой с током. Полученные решения имеют интегральные представления, которые достаточно просто алгоритмизируются.

Важным аспектом развития электромагнитных методов изучения геоэлектрической среды является расширение круга используемых возбудителей (источников) электромагнитного поля. В теоретических исследованиях описания источников присутствуют (в первом уравнении Максвелла либо в граничных условиях) обычно в виде стороннего электрического тока. Так, например, нами решены задачи для произвольного двумерного распределения стороннего тока при возбуждении горизонтально-слоистой [1] и цилиндрически-слоистой [2] сред. При рассмотрении сложных объемных распределений стороннего электрического тока во многих случаях удобнее ввести представление о «магнитном токе». В частности, это может быть горизонтальный магнитный диполь (элементарный магнитный ток), горизонтальная катушка (линейный магнитный ток), тороидальная катушка (круговой магнитный ток). Этот подход использован, например, в весьма общей работе [3] для горизонтально-слоистых сред. Такие источники могут представлять интерес для методов электромагнитного каротажа и наземной малоглубинной геоэлектрики. Здесь мы обсуждаем возбуждение магнитным током горизонтально-слоистой среды, а также цилиндрически-слоистой среды.

Отдельно рассматривается возбуждение тороидальной катушкой (круговой магнитный ток). Этот источник вызывает особый интерес и уже изучался различными авторами (см., например, [4]). Дело в том, что этот источник — практически единственное средство бесконтактного возбуждения ТМ-поляризованного поля (поля электрического типа). Обычно поле такого типа возбуждается гальванически, посредством заземлений (например, вертикальным электрическим диполем или линией).

### 1. ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТАЯ АНИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

Рассмотрим возбуждение гармоническим магнитным током горизонтально-слоистой среды. В общем случае рассматриваем источник как некоторый гармонический поверхностный магнитный ток в плоскости  $z = z_0$ , характеризующийся поверхностной плотностью  $\mathbf{j}^M(x, y)e^{-i\omega t}$  (в амперах).

Решаем задачу в квазистационарном приближении в однородной по магнитной проницаемости (всюду  $\mu = \mu_0$ ) среде, но учтем анизотропию пластов по сопротивлениям. Таким образом, слоистая среда описывается набором параметров  $\sigma_{t0}, \sigma_{n0}$  (верхнее полупространство),  $\sigma_{ti}, \sigma_{ni}, i = 1, 2, \dots, N-1, \sigma_{tN}, \sigma_{nN}$  (нижнее полупространство). Координаты границ  $z_i, i = 1, 2, \dots, N$ , ось  $z$  направлена вниз,  $z_1 = 0$  (рис. 1).

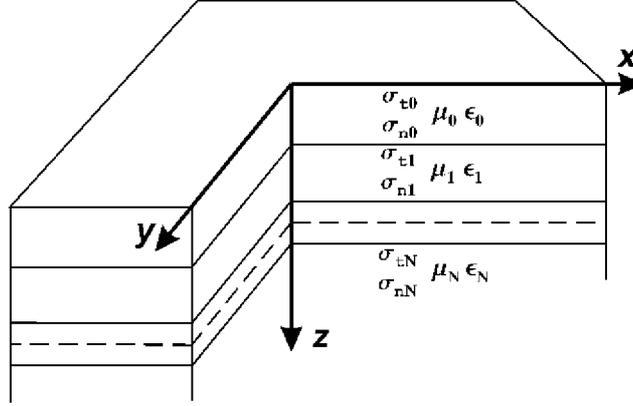


Рис. 1. Модель среды и система координат

В каждом однородном слое ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), исключая плоскость  $z = z_0$ , мы должны решить систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \widehat{\sigma}_i \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где

$$\widehat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{ti} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ti} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ni} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \widehat{\sigma}_i \mathbf{E}.$$

На границах между слоями непрерывны горизонтальные компоненты поля  $(H_x, H_y, E_x, E_y)$ . Источник учитываем как особые условия на границе.

Такой подход был ранее использован для горизонтально-слоистой среды в [1] и для цилиндрически-слоистой среды в [2]. На границе  $z = z_0$ , которая содержит поверхностный сторонний магнитный ток, должны выполняться условия

$$\begin{aligned} [H_x]_{z=z_0} &= 0, & [E_x]_{z=z_0} &= i\omega\mu_0 j_y^M(x, y), \\ [H_y]_{z=z_0} &= 0, & [E_y]_{z=z_0} &= -i\omega\mu_0 j_x^M(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее  $[F]_{z=z_i}$  обозначает скачок функции  $F$  при переходе границы  $z = z_i$ . Можно заметить, что такое определение магнитного тока соответствует определению в [3]. В работе [4] магнитный ток определяется несколько иначе.

Решаем задачу, выражая все компоненты через вертикальные:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma_{ni} E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Lambda_i^2 = -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (5)$$

где  $\Lambda_i = \sqrt{\sigma_{ti}/\sigma_{ni}}$ .

Поставим теперь задачу для  $E_z$  и  $H_z$ . Они должны в каждом слое (причем  $z \neq z_0$ ) удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\Lambda_i^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - k_{ni}^2 E_z &= 0, \\ \Delta H_z - k_{ti}^2 H_z &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_{ni}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_{ni}$ ,  $k_{ti}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_{ti}$ . На границах между слоями ( $z = z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ) и на границе с источником ( $z = z_0$ ), учитывая (3)–(5), имеем

$$[\sigma_n E_z]_{z=z_0, z_i} = \left[ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right]_{z=z_0, z_i} = 0, \quad (7)$$

$$\left[ \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]_{z=z_0, z_i} = \begin{cases} -i\omega\mu_0 \operatorname{rot}_z \mathbf{j}^M, & z = z_0, \\ 0, & z = z_i, \end{cases} \quad (8)$$

$$[H_z]_{z=z_0, z_i} = \begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{j}^M, & z = z_0, \\ 0, & z = z_i, \end{cases} \quad (9)$$

$$\left[ \frac{\partial H_z}{\partial z} \right]_{z=z_0, z_i} = - \left[ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right]_{z=z_0, z_i} = \dots, \quad (10)$$

К условиям (6)–(10) необходимо также добавить условия излучения для функций  $E_z$  и  $H_z$ . Таким образом, мы теперь имеем две независимые задачи, общим между которыми является только источник  $\mathbf{j}^M$ ; задачи зависят от источника совершенно различным образом.

Разделяем переменные, используя двухмерное преобразование Фурье по координатам  $x$  и  $y$ :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta, z) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta,$$

$$f^*(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

В осесимметричном варианте, когда функция  $f$  зависит только от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , пара двойных преобразований Фурье эквивалентна паре преобразований Ганкеля:

$$f(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f^*(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad f^*(\lambda, z) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r, z) J_0(\lambda r) r dr,$$

где  $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

Переходим теперь к образу Фурье нашей задачи. Определим образы  $H_z$  и  $E_z$  в каждом слое как

$$E_z^*(z, \xi, \eta) = -\frac{i\omega\mu_0}{2\lambda} V(z, \lambda) R^*(\xi, \eta),$$

$$H_z^*(z, \xi, \eta) = -\frac{1}{2} X(z, \lambda) D^*(\xi, \eta), \quad (11)$$

где

$$D^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} \mathbf{j}^M(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy,$$

$$R^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rot}_z \mathbf{j}^M(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy. \quad (12)$$

При этом задачи (6)–(10) для  $H_z$  и  $E_z$  необходимым и достаточным образом трансформируются в следующие краевые задачи:

$$X''_{zz} - u_{ii}^2 X = 0, \quad V''_{zz} - u_{ni}^2 V = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad (13)$$

$$[X] = \begin{cases} 2, & z = z_0, \\ 0, & z = z_i, \end{cases} \quad [\sigma_n V]|_{z=z_0, z_i} = 0, \quad (14)$$

$$[X'_z]|_{z=z_0, z_i} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\Lambda^2} V'_z \right] = \begin{cases} 2\lambda, & z = z_0, \\ 0, & z = z_i, \end{cases} \quad (15)$$

$$X \rightarrow 0, \quad V \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где  $u_{ii}^2 = \lambda^2 + k_{ii}^2$ ,  $u_{ni}^2 = \lambda^2 \Lambda_i^2 + k_{ni}^2$ . Здесь  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , — координаты границ однородных слоев,  $z_0$  — положение источника.

Что касается горизонтальных компонент, то, производя преобразование Фурье выражений для горизонтальных компонент (4), (5) и подставляя выражения (11) для  $E_z^*$  и  $H_z^*$ , получим, что

$$\begin{aligned} H_x^* &= \bar{\eta} \frac{k_{ni}^2}{2\lambda} V R^* - \bar{\xi} \frac{1}{2} X'_z D^*, \\ H_y^* &= -\bar{\xi} \frac{k_{ni}^2}{2\lambda} V R^* - \bar{\eta} \frac{1}{2} X'_z D^*, \\ E_x^* &= -\frac{\mathbf{i}\omega\mu_0}{2} \left[ \bar{\xi} \frac{1}{\lambda\Lambda_i^2} V'_z R^* + \bar{\eta} X D^* \right], \\ E_y^* &= -\frac{\mathbf{i}\omega\mu_0}{2} \left[ \bar{\eta} \frac{1}{\lambda\Lambda_i^2} V'_z R^* - \bar{\xi} X D^* \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\bar{\xi} = \mathbf{i}\xi/\lambda^2$ ,  $\bar{\eta} = \mathbf{i}\eta/\lambda^2$ .

**1.1. Решения краевых задач.** Краевые задачи (13)–(16) решаем, определяя  $X$  и  $V$  в каждом однородном слое в виде равенств  $F(z) = A\zeta(z)$  над границей со сторонним магнитным током ( $z < z_0$ ) и  $F(z) = B\zeta(z)$  под этой границей ( $z > z_0$ ). Функции  $\zeta(z)$  — решения однородной задачи без источника, причем

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= e^{u_0 z}, \quad z < 0, \\ \zeta(z) &= \zeta_i \operatorname{ch}[u_i(z - z_i)] + \frac{\zeta'_i}{u_i} \operatorname{ch}[u_i(z - z_i)], \quad z_i < z < z_{i+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\zeta_i = \zeta(z_i)$ ,  $\zeta'_i = \zeta'_z(z_i)$ , или, определяя через значения на нижних границах:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta_{i+1} \operatorname{ch}[u_i(z - z_{i+1})] + \frac{\zeta'_{i+1}}{u_i} \operatorname{ch}[u_i(z - z_{i+1})], \quad z_i < z < z_{i+1}, \\ \zeta(z) &= e^{-u_N(z - z_N)}, \quad z > z_N. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения (18) и (19) позволяют определять функции  $\zeta(z)$  последовательно сверху вниз и снизу вверх. При переходе простой границы непрерывны функции  $h = \zeta$ ,  $f = \frac{\zeta'_z}{\lambda}$  для  $X$  и  $f = \sigma_n \zeta$ ,  $h = \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{\zeta'_z}{\lambda} \right)$  для  $V$ .

Находим функцию  $F$ , имея источник при  $z = z_0$  и определяя коэффициенты  $A$  и  $B$  при учете условий на этой границе согласно (14), (15):

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2\hat{f}(z_0)\check{\zeta}(z)}{D}, \quad z < z_0 \quad (\text{над источником}), \\ F(z) &= \frac{2\check{f}(z_0)\hat{\zeta}(z)}{D}, \quad z > z_0 \quad (\text{под источником}). \end{aligned}$$

Здесь акцент  $\sim$  означает, что функция определяется над источником, последовательно сверху вниз по формулам (18), соответственно акцент  $\hat{\sim}$  — что функция определяется снизу с нижней стороны последней границы по формулам (19), где  $D = \check{f}(z_0)\hat{h}(z_0) - \hat{f}(z_0)\check{h}(z_0)$ .

**1.2. Круговой магнитный ток — тороидальная катушка.** Рассмотрим теперь в качестве источника тороидальную катушку с сечением  $dq$ , радиусом  $a$  и плотностью намотки  $n$  витков на единицу длины окружности. По виткам протекает ток  $I$ . Предположим для простоты, что сечение катушки круглое и радиус его много меньше радиуса катушки. Такой источник можно описать осесимметричным распределением магнитного тока, имеющим только компоненту  $j_\varphi^M$ , причем

$$j_\varphi^M(r) = n\delta(r-a)I dq,$$

где  $\delta(r-a)$  — дельта-функция Дирака.

По предложенному выше алгоритму мы должны определить

$$\text{rot}_z \mathbf{j}^M = n[\delta(r-a)/r + \delta'_r(r-a)]I dq, \quad \text{div} \mathbf{j}^M = 0.$$

Итак, тороидальная катушка возбуждает только поле электрического типа. Далее, согласно (12), пользуясь свойствами дельта-функции Дирака, получим следующее выражение для функции  $R^*$ :

$$R^* = M_\varphi \lambda \frac{2J_1(\lambda a)}{a},$$

где  $M_\varphi = n\pi a^2 I dq$  можно определить как момент тороидальной катушки.

Наконец, для компонент поля, учитывая выражения для образов (11) и (17) и переходя к оригиналам посредством обратного преобразования Ганкеля, получим

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{M_\varphi k_n^2}{4\pi} \frac{2}{a} \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda a) V(\lambda, z) d\lambda, \\ E_z &= -\frac{M_\varphi i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{2}{a} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) V(\lambda, z) \lambda d\lambda, \\ E_r &= \frac{M_\varphi i\omega\mu_0}{4\pi\Lambda^2} \frac{2}{a} \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda a) V'_z(\lambda, z) d\lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Поместим тороидальную катушку на границу  $z_1 = z_0 \equiv 0$  между проводящими изотропными полупространствами  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$ . Соответственно, функция  $V$  в нижнем ( $z > 0$ ) полупространстве есть

$$V(\lambda, z) = \frac{2\lambda\sigma_0 \exp(-u_1 z)}{\sigma_0 u_1 + \sigma_1 u_0}, \quad (21)$$

где  $u_i = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_i}$ ,  $i = 0, 1$ .

Рассмотрим (20) при  $a \ll r$ . В таком случае в интегралах (20) можно положить  $J_1(\lambda a) \approx \lambda a/2$ . Если еще принять среду однородной ( $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$ ), то интегралы (20) вычисляются, например:

$$H_\varphi = \frac{M_\varphi k_n^2}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{\lambda^2 \exp(-uz)}{u} d\lambda$$

или, пользуясь выражением для интеграла Зоммерфельда:

$$H_\varphi = -\frac{M_\varphi k^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{-kR}}{R} \right],$$

где  $k = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}$ ,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

Выражения для компонент поля (20), (21) получены нами в квазистационарном приближении. Однако если формально заменить  $\sigma$  на  $\sigma - i\omega\varepsilon$ , мы получим выражения с учетом токов смещения. Например, полагая верхнее полупространство изолирующим с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$  (воздух), а нижнее изотропным с проводимостью  $\sigma_1$  и с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ , для компоненты  $H_\varphi$  в нижнем полупространстве получим

$$H_\varphi = -na\omega^2\varepsilon_0\mu_0(\sigma_1 - i\omega\varepsilon_1)I dq \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)J_1(\lambda a)\lambda \exp(-u_1 z) d\lambda}{(\sigma_1 - i\omega\varepsilon_1)u_0 - i\omega\varepsilon_0 u_1}.$$

Это совпадает с выражением для магнитного поля, полученным Дж. Р. Уэйтом в [4].

## 2. Цилиндрически-слоистая среда

Будем рассматривать одномерную цилиндрически-слоистую кусочно-однородную геоэлектрическую модель (рис. 2), в которой примем цилиндрическую систему координат. Каждый слой считаем изотропным.

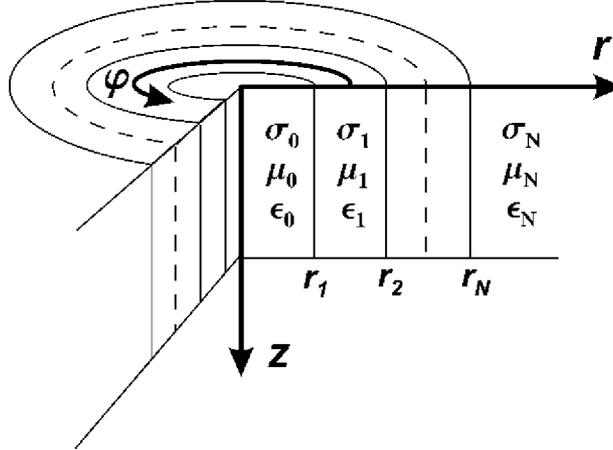


Рис. 2. Модель среды и система координат

Требуется найти выражения для всех компонент электромагнитного поля ( $H_r, H_z, H_\varphi, E_r, E_z, E_\varphi$ ) при условии, что на определенной цилиндрической границе (фактической или фиктивной,  $r = r_l$ ) данного геоэлектрического разреза задано распределение поверхностной плотности стороннего магнитного тока (в амперах), меняющегося по гармоническому закону  $\mathbf{j}^M(z)e^{-i\omega t}$ .

Для определения искомых компонент поля требуется решить систему уравнений Максвелла (1), (2) в каждом однородном слое ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Надо заметить, что первое уравнение системы (1), (2) в нашем случае принимает вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\sigma}_i \mathbf{E},$$

где  $\tilde{\sigma}_i$  — комплексная проводимость  $i$ -го слоя, т. е.  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i - i\omega\varepsilon_i$ .

На простых границах ( $r = r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq l$ ,  $1 \leq l \leq N$ ) между слоями непрерывны тангенциальные (вертикальные и угловые) компоненты электромагнитного поля ( $H_z, H_\varphi, E_z, E_\varphi$ ). На границе ( $r = r_l$ ), в которой протекает поверхностный сторонний ток, должны выполняться особые граничные условия. Таким образом, как и выше, источник в задаче мы учитываем как дополнительные граничные условия.

Эти особые граничные условия имеют вид

$$[H_z]|_{r=r_l} = 0, \quad [E_z]|_{r=r_l} = -\mathbf{i}\omega\mu_0 j_\varphi^M(z), \quad (22)$$

$$[H_\varphi]|_{r=r_l} = 0, \quad [E_\varphi]|_{r=r_l} = \mathbf{i}\omega\mu_0 j_z^M(z). \quad (23)$$

Для векторов магнитного и электрического поля можно записать отдельные уравнения. В каждом однородном слое  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  должны удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{F} - k_i^2 \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{H}, \mathbf{E}. \quad (24)$$

Здесь и далее  $k_i^2 = -\mathbf{i}\omega\mu_i \tilde{\sigma}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Присоединив сюда условия излучения на бесконечности, мы вполне определили задачу.

Переходя к решению, мы должны скаляризовать задачу и разделить ее по отдельным проблемам. Известно (например, [1, 2, 5]), что в случае одномерной среды во многих случаях задача сводится к определению нормальных компонент, а тангенциальные выражаются через нормальные. В нашем случае

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_r)}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \tilde{\sigma}_i E_r, \quad (25)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_r)}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = \mathbf{i}\omega\mu_i H_r. \quad (26)$$

Перейдем к постановке задачи для  $E_r$  и  $H_r$ . Подставив выражение оператора Лапласа в цилиндрической системе координат в уравнение (24), получим уравнения для  $E_r$  и  $H_r$ :

$$\Delta F_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{F_r}{r^2} - k_i^2 F_r = 0, \quad F = H, E.$$

Получим и условия для нормальных компонент электромагнитного поля. Учитывая выражения (22), (23), (25), (26) и линейность оператора дифференцирования, для нормальных компонент электромагнитного поля окончательно имеем следующие граничные условия ( $r = r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ):

$$[\mu H_r]|_{r=r_i} = \begin{cases} -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{j}^M(\varphi, z), & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad (27)$$

$$\left[ \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_i} = 0, \quad (28)$$

$$[\tilde{\sigma} E_r]|_{r=r_i} = 0, \quad (29)$$

$$\left[ \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_i} = \begin{cases} -\mathbf{i}\omega\mu_0 \operatorname{rot}_r \mathbf{j}^M(\varphi, z), & i = l, \\ 0, & i \neq l. \end{cases} \quad (30)$$

**2.1. Осесимметричная задача.** Общая задача не вполне скаляризовалась. Поэтому имеет смысл выделить практически важный случай осесимметричного и соосного с цилиндрически-слоистой средой распределения стороннего тока. Тогда решение также не будет зависеть от  $\varphi$  и задача радикально упрощается. Уравнения для  $H_r$ ,  $E_r$  принимают вид

$$\Delta F - \frac{1}{r^2}F - k_i^2 F = 0, \quad F(r, z) = H_r(r, z), \quad E_r(r, z). \quad (31)$$

Таким образом, задачи для  $H_r$ ,  $E_r$  скалярны и независимы. Решим эти задачи разделением переменных, воспользовавшись преобразованием Фурье по координате  $z$ :

$$f(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(r, \xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad f^*(r, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, z) e^{-i\xi z} dz.$$

Если применить преобразование Фурье к задачам (27)–(31) для  $H_r$ ,  $E_r$  и определить

$$E_r^*(r, \xi) = X(r)A^*(\xi), \quad H_r^*(r, \xi) = Y(r)B^*(\xi), \quad (32)$$

где

$$A^*(\xi) = i\omega\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial j_\varphi^M}{\partial z} e^{-i\xi z} dz, \quad B^*(\xi) = -\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial j_z^M}{\partial z} e^{-i\xi z} dz,$$

мы сведем задачу к нахождению двух совершенно независимых друг от друга и от конфигурации источника функций  $X$  и  $Y$ , которые в каждом однородном слое ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \left( \frac{1}{r^2} + u_i^2 \right) F = 0, \quad F = X, Y, \quad (33)$$

где  $u_i = \sqrt{k_i^2 + \xi^2}$ , но разным условиям на границах ( $r = r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ):

$$[\tilde{\sigma}X]|_{r=r_i} = 0, \quad \left[ \frac{X}{r} + X'_r \right] \Big|_{r=r_i} = \begin{cases} 1, & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad (34)$$

для  $X$  и

$$[\mu Y]|_{r=r_i} = \begin{cases} 1, & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad \left[ \frac{Y}{r} + Y'_r \right] \Big|_{r=r_i} = 0 \quad (35)$$

для  $Y$ ; причем функции  $X$  и  $Y$  равны нулю при  $r = 0$  и стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Применив преобразование Фурье к системе уравнений (25), (26) и учитывая теперь их независимость от  $\varphi$ , получим

$$i\xi H_\varphi^* = -\tilde{\sigma}_i E_r^*, \quad i\xi E_\varphi^* = -i\omega\mu_i H_r^*, \quad (36)$$

$$i\xi H_z^* = -\frac{H_r^*}{r} - \frac{\partial H_r^*}{\partial r}, \quad i\xi E_z^* = -\frac{E_r^*}{r} - \frac{\partial E_r^*}{\partial r}. \quad (37)$$

Из системы уравнений (36), (37) легко получить выражения для образов Фурье всех компонент электромагнитного поля в каждом однородном слое ( $i = 0, 1, \dots, N$ ):

$$H_r^* = YB^*, \quad E_r^* = XA^*, \quad (38)$$

$$H_\varphi^* = \frac{i\xi r^2 \tilde{\sigma}_i}{r^2 \xi^2} XA^*, \quad E_\varphi^* = -\frac{r^2 \xi \omega \mu_i}{r^2 \xi^2} YB^*, \quad (39)$$

$$H_z^* = \frac{ir\xi}{r^2 \xi^2} \left( Y + r \frac{\partial Y}{\partial r} \right) B^*, \quad E_z^* = \frac{i\xi r}{r^2 \xi^2} \left( X + r \frac{\partial X}{\partial r} \right) A^*. \quad (40)$$

Решим краевые задачи (33)–(35). Обозначим  $X(r)$  и  $Y(r)$  через  $R(r)$ , так как данные функции зависят только от  $r$  и удовлетворяют одному и тому же уравнению. Функцию  $R(r)$  определим как

$$R(r) = \begin{cases} P\zeta(r), & r < r_l, \\ Q\zeta(r), & r > r_l. \end{cases}$$

Приведем сразу выражения функции  $\zeta$  через ее же значения на ближней  $i$ -й и дальней  $i + 1$ -й цилиндрических границах:

$$\zeta(r) = \frac{\zeta_{1-0}}{I_1(u_0 r_1)} I_1(u_0 r), \quad r < r_1, \quad (41)$$

$$\zeta(r) = r_{i+1} [\zeta_{i+1-0} \alpha_{i+1-0}(r, i) - \zeta'_{i+1-0} \beta_{i+1-0}(r, i)] \quad (42)$$

через значения на дальней границе и

$$\zeta(r) = r_i [\zeta_{i+0} \alpha_{i+0}(r, i) - \zeta'_{i+0} \beta_{i+0}(r, i)], \quad (43)$$

$$\zeta(r) = \frac{\zeta_{N+0}}{K_1(u_N r_N)} K_1(u_N r), \quad r > r_N, \quad (44)$$

через значения на ближней границе; здесь

$$\alpha_{i+0}(r, i) = I'_{1,r}|_{r=r_i} K_1(u_i r) - K'_{1,r}|_{r=r_i} I_1(u_i r),$$

$$\alpha_{i+1-0}(r, i) = I'_{1,r}|_{r=r_{i+1}} K_1(u_i r) - K'_{1,r}|_{r=r_{i+1}} I_1(u_i r),$$

$$\beta_{i+0}(r, i) = I_1(u_i r_i) K_1(u_i r) - K_1(u_i r_i) I_1(u_i r),$$

$$\beta_{i+1-0}(r, i) = I_1(u_i r_{i+1}) K_1(u_i r) - K_1(u_i r_{i+1}) I_1(u_i r).$$

Таким образом, имеем выражения функции  $\zeta(r)$  в каждом однородном слое ( $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ ) через ее же значения на границах.

При переходе границ между слоями ( $r = r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq l$ ) непрерывны следующие функции:  $f = \tilde{\sigma}\zeta$ ,  $h = \zeta/r + \zeta'_r$  для  $X$  и  $f = \zeta/r + \zeta'_r$ ,  $h = \mu\zeta$  для  $Y$ .

Формулы (41)–(44) представляют собой рекуррентный алгоритм расчетов поля в слоистой среде.

Константы  $P$  и  $Q$  определяются из условий на границе с источником. Окончательно имеем

$$R(r) = \frac{f_{l+0}}{f_{l-0} h_{l+0} - f_{l+0} h_{l-0}} \zeta(r), \quad r < r_l, \quad (45)$$

$$R(r) = \frac{f_{l-0}}{f_{l-0} h_{l+0} - f_{l+0} h_{l-0}} \zeta(r), \quad r > r_l.$$

Таким образом, как и в случае горизонтально-слоистой среды, можно последовательно, переходя от одного слоя к другому и применяя формулы (41)–(44), вычислить значения функции  $R(r)$ .

Итак, мы нашли решение для функций  $X$  и  $Y$ , что определяет по формулам (38)–(40) образы компонент электромагнитного поля.

**2.2. Круговой магнитный ток.** Продемонстрируем использование полученных решений. Заметим, что после разделения переменных (32) параметры источника (распределение поверхностной плотности стороннего магнитного тока  $\mathbf{j}^M$ ) входят только в функции  $A^*(\xi)$  и  $B^*(\xi)$ , из чего следует, что нам достаточно для каждого конкретного источника, в частности для осесимметричной

тороидальной катушки с током (круговой магнитный ток радиусом  $a = r_l$ ), определить эти функции.

Для такого источника, определенного выше в среде с горизонтальными границами, имеется только одна компонента  $j_\varphi^M(z)$ , причем теперь в системе цилиндрических границ  $j_\varphi^M(z) = n\delta(z-z_0)I dq$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Таким образом,

$$\begin{aligned} A^*(\xi) &= -\omega\mu_0 n\xi e^{-i\xi z_0} I dq, \\ B^*(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Образы Фурье ненулевых компонент электромагнитного поля в соответствии с (38)–(40) примут вид

$$\begin{aligned} E_r^* &= -\omega\mu_0 \frac{M_\varphi}{\pi a^2} X \xi e^{-i\xi z_0}, \\ E_z^* &= -i\omega\mu_0 \frac{M_\varphi}{\pi a^2} \left( \frac{X}{r} + \frac{\partial X}{\partial r} \right) e^{-i\xi z_0}, \\ H_\varphi^* &= -i\omega\mu_0 \tilde{\sigma}_i \frac{M_\varphi}{\pi a^2} X e^{-i\xi z_0}. \end{aligned}$$

Сами компоненты электромагнитного поля выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\omega\mu_0 \frac{M_\varphi}{2\pi^2 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} X e^{i\xi(z-z_0)} \xi d\xi, \\ E_z(r, z) &= -i\omega\mu_0 \frac{M_\varphi}{2\pi^2 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{X}{r} + \frac{\partial X}{\partial r} \right) e^{i\xi(z-z_0)} d\xi, \\ H_\varphi(r, z) &= -i\omega\mu_0 \tilde{\sigma}_i \frac{M_\varphi}{2\pi^2 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} X e^{i\xi(z-z_0)} d\xi. \end{aligned} \quad (46)$$

Как и выше, в случае горизонтально-слоистой среды легко получить выражения для поля тороидальной катушки в однородной среде с геоэлектрическими параметрами  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ . Если положить, что при  $r = a$  находится единственная фиктивная цилиндрическая граница, то в соответствии с (45) выражения для функции  $X$  имеют вид

$$X(r) = -aK_1(ur)I_1(ua), \quad r > a.$$

Рассмотрим (46) при  $a \ll r$ . В этом случае в интеграле (46) можно положить  $I_1(ua) \approx ua/2$ :

$$H_\varphi(r, z) = i\omega\mu_0 \tilde{\sigma}_i \frac{M_\varphi}{2\pi^2} \int_0^{\infty} uK_1(ur) \cos[\xi(z-z_0)] d\xi$$

или

$$H_\varphi(r, z) = -i\omega\mu_0 \tilde{\sigma} \frac{M_\varphi}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{-kR}}{R} \right], \quad (47)$$

где  $u = \sqrt{k^2 + \xi^2}$ ,  $k^2 = -i\omega\mu\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\sigma} = \sigma - i\omega\varepsilon$  и  $R = \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}$ . Выражение (47) совпадает, естественно, с полученным выше для псевдогоризонтально-слоистой среды. Можно заметить, что тороидальная катушка является аналогом вертикального электрического диполя (ВЭД). Если воспользоваться известным выражением для поля ВЭД (например, [5]), то при выполнении соотношения  $-i\omega\mu_0 \tilde{\sigma} M_\varphi = Idz$ , где  $Idz$  — момент ВЭД, поля этих источников совпадают.

На рис. 3 приведены результаты расчета реальной части ЭДС для гипотетического каротажного зонда, состоящего из питающей и приемной тороидальных катушек, в зависимости от разноса между катушками по вертикали. Катушки (генераторная и приемная) радиусом 0,108 м состоят из 1000 витков с площадью сечения 0,0001 м<sup>2</sup>; ток в генераторной катушке 1 А с частотой 875 кГц.

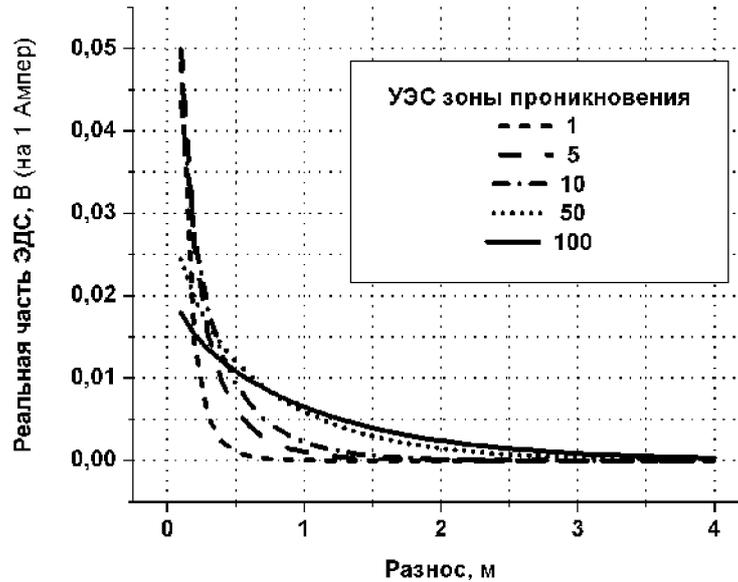


Рис. 3. Реальная часть ЭДС в трехслойной среде

Рассматривалась трехслойная модель среды: скважина (буровой раствор) с удельным электрическим сопротивлением (УЭС) 1 Ом·м и радиусом 0,108 м; зона проникновения радиусом 0,6 м; вмещающая среда с сопротивлением 5 Ом·м. Шифр кривых — сопротивление зоны проникновения.

Как видно из рисунка, для модели с меньшим удельным сопротивлением зоны проникновения ЭДС быстрее стремится к нулю, что обусловлено большим затуханием поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Могилатов В. С. Возбуждение электромагнитного поля в слоистой Земле горизонтальным токовым листом // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. 1998. № 5. С. 45–53.
2. Борисов Г. А., Могилатов В. С. Электромагнитное возбуждение цилиндрически-слоистой среды различными источниками // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 3(11). С. 53–66.
3. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 55–65.
4. Wait J. R. Excitation of a conducting half-space by a toroidal coil // IEEE Ant. Prop. Mag. 1995. V. 37, N 4. P. 72–74.
5. Табаровский Л. А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975.