



Общероссийский математический портал

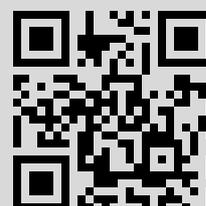
В. С. Могилатов, А. В. Злобинский, Математическое обеспечение индуктивной импульсной электроразведки, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2006, том 9, номер 1, 91–105

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 84.237.119.225

13 марта 2017 г., 11:29:02



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНДУКТИВНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

В. С. Могилатов, А. В. Злобинский

Рассматривается базовый математический аппарат электроразведки методом установления электромагнитного поля в Земле. Подробно анализируется метод Тихонова решения задачи об установлении.

В методе установления используется отклик геоэлектрической среды на изменение режима работы источника. Наиболее практичной реализацией этого принципа является полное отключение источника и последующая регистрация отклика. Следующий вопрос, который может возникнуть при определении конкретной методики, состоит в способе воздействия источника на среду. Даже на самый поверхностный взгляд кажется, что среда будет весьма различным образом реагировать на прямой ток с заземления и на возбуждение посредством индуктивной связи с токовым контуром. Этот вопрос тесно связан с фактом существования электромагнитного поля в слоистой среде в виде суперпозиции двух фракций различной поляризации (H -поле и E -поле, H -мода и E -мода, TE -поле и TM -поле и т. д.). Эти составляющие соответствуют переходным процессам двух типов, вклад каждого из которых в суммарное поле зависит от разных свойств распределения стороннего тока (источника). Нашей задачей будет наиболее отчетливо показать связь между конфигурацией стороннего тока и типом возбуждаемого поля и на строго формальной основе выделить из общего индукционного электромагнитного процесса ту его часть, которая возбуждается индуктивным способом, т. е. относится к индуктивным импульсным зондированиям.

§ 1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНДУКЦИОННЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ

Лейтмотивом предлагаемого подхода является четкое разделение поля произвольного (здесь, впрочем, ограничиваемся произвольным двухмерным горизонтальным распределением стороннего тока) возбудителя на две фактически независимые фракции. Разумеется, сам факт давно известен, сошлемся, например, на работы В. И. Дмитриева [1], Л. А. Табаровского [2], Л. Л. Ваньяна [3], Дж. Р. Уэйта [4]. Поясняя подход, можно сказать, что незаземленная петля есть чисто индуктивный источник, возбуждающий в слоистой Земле только TE -поле (transverse electric), так называемый круговой электрический диполь (КЭД [5, 6]) есть чисто гальванический источник, возбуждающий TM -поле (transverse magnetic), наконец, горизонтальный электрический (заземленный) диполь есть смешанный источник, фактически составленный из трех: токового отрезка (индуктивный источник) и двух точечных заземлений (гальванические источники). Эти основные типы источников показаны на рис. 1.

Рассмотрим одномерную кусочно-однородную геоэлектрическую модель, изображенную на рис. 1, а. Все многообразие различных питающих установок, располагаемых на дневной поверхности ($z = z_1 = 0$) или на любой другой из границ ($z = z_i$) и образованных отрезками провода и заземлениями, можно формально описать, введя распределение поверхностной плотности (в А/м)

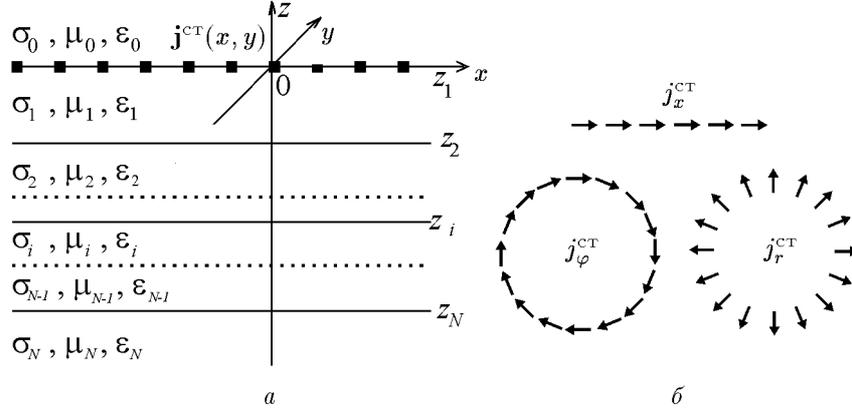


Рис. 1. Модель среды и три типа источников

стороннего тока, меняющегося синхронно: $\mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y)q(t)$. Заметим, что допущение синхронности изменения тока в каждой точке распределенного источника может быть физически некорректным при рассмотрении сверхвысоких частот (при необходимости учета токов смещения и конечной скорости распространения). В каждом однородном слое ($i = 0, 1, \dots, N$) мы должны решить систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma_i \mathbf{E} + \varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (4)$$

На границах между слоями непрерывны горизонтальные компоненты поля (H_x, H_y, E_x, E_y). На границе, которая содержит поверхностный сторонний ток (допустим, что это l -я граница, при $z = z_l$), должны выполняться особые условия, которые являются следствием уравнения (1):

$$\begin{aligned} [H_x]_{z=z_l} &= j_y^{\text{ct}}(x, y)q(t), & [H_y]_{z=z_l} &= -j_x^{\text{ct}}(x, y)q(t), \\ [E_x]_{z=z_l} &= 0, & [E_y]_{z=z_l} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее $[F]_{z=z_i}$ обозначает скачок функции F при переходе границы $z = z_i$. Заметим, что, принимая (5) в таком виде, мы пренебрегаем влиянием материального носителя стороннего тока как части геоэлектрической среды.

Уменьшим число неизвестных функций в задаче (1)–(5), сведя задачу к определению вертикальных компонент поля (известный прием, см., например, [2]). Из (1)–(4) можно получить следующие выражения горизонтальных компонент через вертикальные:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma_i E_z + \varepsilon_i \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_i \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (9)$$

Поставим теперь задачу для E_z и H_z . Они должны в каждом слое удовлетворять уравнению

$$\Delta F = \mu_i \sigma_i \frac{\partial F}{\partial t} + \mu_i \varepsilon_i \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (10)$$

на границах ($z = z_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, источник на границе $z = z_l$), учитывая (5)–(9), имеем

$$\left[\sigma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right] \Big|_{z=z_i} = \begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{ct}} q(t), & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_i} = 0, \quad (12)$$

$$[\mu H_z] \Big|_{z=z_i} = 0, \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_i} = \begin{cases} -\operatorname{rot}_z \mathbf{j}^{\text{ct}} q(t), & i = l, \\ 0, & i \neq l. \end{cases} \quad (14)$$

К условиям (10)–(14) необходимо также добавить условия излучения для функций E_z , H_z .

Теперь можно заметить, что уже получен важный результат. Проблема с произвольным плоским источником разделена на две независимые краевые задачи для скалярных функций, которые совершенно по-разному зависят от заданного распределения стороннего тока.

Решаем эти задачи разделением переменных. Поскольку распределение $\mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y)$ пока произвольно, разделяем переменные, используя двухмерное преобразование Фурье по координатам x и y , которое определяется следующим образом:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta, z) e^{i\xi x} e^{i\eta y} d\xi d\eta, \quad (15)$$

$$f^*(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy. \quad (16)$$

В осесимметричном варианте, когда функция f зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, пара двойных преобразований Фурье эквивалентна паре преобразований Ганкеля:

$$f(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f^*(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (17)$$

$$f^*(\lambda, z) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r, z) J_0(\lambda r) r dr, \quad (18)$$

где $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Нетрудно видеть, что, определяя

$$\begin{aligned} E_z^*(z, t, \xi, \eta) &= \frac{1}{2\sigma_i} V(z, t, \lambda) D^*(\xi, \eta), \\ H_z^*(z, t, \xi, \eta) &= \frac{1}{2\lambda} X(z, t, \lambda) R^*(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$D^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy, \quad (20)$$

$$R^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rot}_z \mathbf{j}^{\text{ct}}(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy, \quad (21)$$

мы сводим задачу к нахождению двух совершенно независимых друг от друга и от конфигурации источника функций X и V , которые в каждом ($i = 0, 1, \dots, N$) однородном слое удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \lambda^2 F = \mu_i \sigma_i \frac{\partial F}{\partial t} + \mu_i \varepsilon_i \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

но разным условиям на границах ($z = z_i, i = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} [\mu X]_{z=z_i} &= 0, \quad [X'_z]_{z=z_i} = \begin{cases} -2\lambda q(t), & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad X \rightarrow 0, \\ \left[V + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial V}{\partial t} \right]_{z=z_i} &= \begin{cases} -2q(t), & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad [V'_z/\sigma]_{z=z_i} = 0, \quad V \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти краевые задачи мы будем решать ниже. Сейчас обсудим общий вид решения (Фурье-образ) для всех компонент. Применяя преобразование Фурье к равенствам (6)–(9) и выражая образы горизонтальных компонент через образы вертикальных, получим, что в каждом слое

$$H_x^* = \frac{\bar{\eta}}{2} \left[V + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{\partial V}{\partial t} \right] D^* + \frac{\bar{\xi}}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial z} R^*, \quad (23)$$

$$H_y^* = -\frac{\bar{\xi}}{2} \left[V + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{\partial V}{\partial t} \right] D^* + \frac{\bar{\eta}}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial z} R^*, \quad (24)$$

$$H_z^* = \frac{1}{2\lambda} X R^*, \quad (25)$$

$$E_x^* = \frac{\bar{\xi}}{2\sigma_i} \frac{\partial V}{\partial z} D^* - \frac{\bar{\eta} \mu_i}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial t} R^*, \quad (26)$$

$$E_y^* = \frac{\bar{\eta}}{2\sigma_i} \frac{\partial V}{\partial z} D^* + \frac{\bar{\xi} \mu_i}{2\lambda} \frac{\partial X}{\partial t} R^*, \quad (27)$$

$$E_z^* = \frac{1}{2\sigma_i} V D^*, \quad (28)$$

где $\bar{\xi} = i\xi/\lambda^2$, $\bar{\eta} = i\eta/\lambda^2$, $i = 0, 1, \dots, N$. Таким образом, поведение поля со временем описывается двумя независимыми функциями V и X разного типа. Иначе говоря, процесс установления поля произвольного источника есть суперпозиция

двух различных процессов. Вклад каждого процесса определяется коэффициентами D^* и R^* , т. е. согласно (20) и (21) конфигурацией источника (стороннего тока) посредством значений функций $\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{CT}}(x, y)$ и $\operatorname{rot}_z \mathbf{j}^{\text{CT}}(x, y)$. Понятно (вспоминая физический смысл дивергенции и ротора), что одна составляющая определяется стоками или, в нашем случае, током, стекающим (втекающим) с заземлений (возбуждается гальваническим путем), а другая составляющая зависит от вихревой компоненты в распределении стороннего тока (возбуждается индуктивным путем). Пользуясь полученным представлением решения для произвольного источника, можно целенаправленно изменять конфигурацию источника, добиваясь подавления гальванической компоненты или индуктивной. Впрочем, подавление гальванической составляющей процесса, причем полное (всюду $\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{CT}}(x, y) = 0$), давно известно и применяется — это незаземленный контур с током.

ПРИМЕР 1. ТОКОВАЯ ПЕТЛЯ — ИНДУКТИВНЫЙ ИСТОЧНИК. Возьмем особый случай, как распределение стороннего тока с азимутальной симметрией. Здесь также имеется много возможностей, но мы примем, что в полярной системе координат имеется только $j_\varphi^{\text{CT}}(r)$, причем $j_\varphi^{\text{CT}}(r) = I\delta(r - a)$. Это значит, что рассматривается круглая (радиус a) токовая петля. Итак, в цилиндрической системе координат получим

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{CT}} = \frac{1}{r} \frac{\partial j_\varphi^{\text{CT}}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{j}^{\text{CT}} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_\varphi^{\text{CT}})}{\partial r} = I[\delta(r - a)/r + \delta'(r - a)].$$

Следовательно, $D^* = 0$, и этот источник — чисто индуктивный (конечно, мы это подозревали).

Что касается функции R^* , то, воспользовавшись азимутальной симметрией и перейдя от преобразований Фурье (15), (16) к преобразованиям Ганкеля (17), (18), а также вспоминая определение дельта-функции Дирака и ее производных, получим

$$R^* = 2\pi I \int_0^\infty [\delta(r - a)/r + \delta'(r - a)] J_0(\lambda r) r dr = 2\pi I \lambda a J_1(\lambda a). \quad (29)$$

Нетрудно видеть, учитывая (23)–(28), что в цилиндрической системе координат отличны от нуля компоненты H_r , H_z и E_φ . Например, компонента E_φ представится в следующем виде:

$$E_\varphi(r, z, t) = \frac{M_z \mu_i}{2\pi a} \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda a) \frac{\partial X(z, t, \lambda)}{\partial t} d\lambda, \quad (30)$$

где $M_z = I\pi a^2$ определяется как момент источника. В теории обычно рассматривается петля бесконечно малого радиуса, но с конечным моментом — вертикальный магнитный диполь. В этом случае $J_1(\lambda a) \simeq \lambda a/2$ и (30) примет вид

$$E_\varphi(r, z, t) = \frac{M_z \mu_i}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \lambda \frac{\partial X(z, t, \lambda)}{\partial t} d\lambda. \quad (31)$$

ПРИМЕР 2. ЗАЗЕМЛЕННАЯ ЛИНИЯ — СМЕШАННЫЙ ИСТОЧНИК. Рассмотрим и такой классический источник устанавливающегося электромагнитного

поля, как заземленная горизонтальная электрическая линия или диполь. Возьмем короткую линию с током I , заземленную в точках по оси x при $x = -dx_0/2$ и $x = dx_0/2$. Таким образом, сторонний ток имеет только компоненту j_x^{CT} , причем

$$j_x^{\text{CT}}(x, y) = I\delta(y)[U(x + dx_0/2) - U(x - dx_0/2)]$$

(U — функция Хевисайда), а для диполя с моментом $I dx_0$

$$j_x^{\text{CT}}(x, y) = I dx_0 \delta(y) \delta(x).$$

Тогда

$$\text{div } \mathbf{j}^{\text{CT}} = I dx_0 \delta(y) \delta'(x), \quad (32)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{j}^{\text{CT}} = -I dx_0 \delta'(y) \delta(x). \quad (33)$$

Затем определяем

$$D^* = I dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \delta'(x) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} dx dy = I dx_0 i \xi, \quad (34)$$

$$R^* = -I dx_0 i \eta. \quad (35)$$

Наконец, согласно (23)–(28) и (15)–(18) получим выражения для всех компонент нестационарного поля горизонтального электрического диполя:

$$\begin{aligned} H_x &= I dx_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \hat{H} \left(\frac{V}{\lambda} + \frac{\varepsilon_i V'_t}{\sigma_i \lambda} - \frac{X'_z}{\lambda^2} \right), \\ H_y &= -I dx_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{H} \left(\frac{V}{\lambda} + \frac{\varepsilon_i V'_t}{\sigma_i \lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{H} \left(\frac{X'_z}{\lambda^2} \right) \right], \\ H_z &= I dx_0 \frac{\partial}{\partial y} \hat{H}(X), \\ E_x &= I dx_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{H} \left(\frac{V'_z}{\sigma_i \lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{H} \left(\frac{\mu_i X'_t}{\lambda^2} \right) \right], \\ E_y &= I dx_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \hat{H} \left(\frac{V'_z}{\sigma_i \lambda} - \frac{\mu_i X'_t}{\lambda^2} \right), \\ E_z &= -I dx_0 \frac{\partial}{\partial x} \hat{H} \left(\lambda \frac{V}{\sigma_i} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где \hat{H} — интегральный оператор, определенный как

$$\hat{H}(F) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) F(\lambda) d\lambda,$$

а функции X, V удовлетворяют краевым задачам (22).

Итак, в данной работе будут подробно рассмотрены решения только для TE -поляризованного поля, которое используется в импульсной электроразведке при индуктивном возбуждении замкнутым контуром с током либо при возбуждении, например, электрической заземленной линией, но с регистрацией вертикальной магнитной компоненты (т. е. той части общего поля, которая возбуждается индуктивно). В теоретическом отношении это означает, что наше внимание сосредоточивается на решении и свойствах краевой задачи (22) лишь для функции X .

§ 2. ДВА СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ

Решаем краевую задачу (22), продолжая разделять переменные. Функцию X будем искать как суперпозицию решений вида $Z(z) \exp(-\alpha t)$, где $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Функцию Z определим как $Z(z) = A\zeta(z)$ над границей со сторонним током ($z \geq z_l$) и $Z(z) = B\zeta(z)$ под границей. Функция ζ в i -м слое может быть выражена через свои же значения (внутренние) на нижней или на верхней границе слоя. Обозначая $\zeta_i = \zeta(z_i)$, $\zeta'_i = \zeta'_z(z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, имеем в каждом слое ($z_i \geq z \geq z_{i+1}$)

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta_1 \exp(-u_0 z), \quad z \geq 0 \text{ (в воздухе)}, \\ \zeta(z) &= \zeta_i \operatorname{ch}[u_i(z - z_i)] + \frac{\zeta'_i}{u_i} \operatorname{sh}[u_i(z - z_i)] \end{aligned} \quad (37)$$

или

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta_{i+1} \operatorname{ch}[u_i(z - z_{i+1})] + \frac{\zeta'_{i+1}}{u_i} \operatorname{sh}[u_i(z - z_{i+1})], \\ \zeta(z) &= \zeta_N \exp[u_N(z - z_N)], \quad z \leq z_N. \end{aligned}$$

Здесь $u_i^2 = \lambda^2 + k_i^2$, $k_i^2 = -\alpha \mu_i \sigma_i + \alpha^2 \mu_i \varepsilon_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. При переходе простой границы непрерывны функции

$$f = \mu \zeta, \quad h = \zeta'_z / \lambda.$$

На этом этапе следует уточнить вид параметра α . Обычно его берут в виде $i\omega$, и функция X представляется интегралом Фурье:

$$X = \widehat{F}(Z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(z) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (38)$$

Находим функцию Z , имея источник на l -й границе и определяя коэффициенты A и B при учете условий на этой границе согласно (22), относимых теперь к функции Z :

$$Z(z) = \frac{2Q(\omega) \hat{f}_l}{\hat{f}_l \hat{h}_l - \hat{f}_i \hat{h}_l} \check{\zeta}(z), \quad z \geq z_l \text{ (над источником)}, \quad (39)$$

$$Z(z) = \frac{2Q(\omega) \hat{f}_l}{\hat{f}_l \hat{h}_l - \hat{f}_i \hat{h}_l} \hat{\zeta}(z), \quad z \leq z_l \text{ (под источником)}. \quad (40)$$

Здесь обозначение \check{x} означает, что функция x определяется над источником последовательно сверху вниз по формулам (37), причем значение на верхней стороне первой границы произвольно. Соответственно обозначение \hat{x} означает, что функция x определяется снизу с нижней стороны последней границы. Индекс указывает, что берется значение на соответствующей границе. Функция $Q(\omega)$ есть трансформанта функции, описывающей форму возбуждающего импульса, т. е. $q(t) = \widehat{F}(Q)$. Для мгновенного включения имеем, в частности, $Q(\omega) = 1/(-i\omega)$. Если $q(t) = \exp(-i\omega_0 t)$ (т. е. $Q(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$), мы получаем гармоническое решение для частоты ω_0 .

Фактически здесь в несколько необычной последовательности в разделении переменных использован обычный способ решения задачи о становлении, известный как решение в частотной области. Наиболее основательно он был предложен в [7]. Проблемы численной реализации этого алгоритма решены, но только

в квазистационарном приближении. При учете токов смещения возможность численной реализации преобразования Фурье резко ухудшается.

В квазистационарном приближении можно предложить и другой способ решения краевых задач (22), который впервые использовал А. Н. Тихонов в [8]. Если токами смещения пренебречь и принять верхнее (воздух) и нижнее полу-пространства изолирующими, то решение в этих областях для функций X и V есть $F(z) = C \exp(-\lambda|z|)$ и задачи для X и V ограничиваются по z ($0 \geq z \geq z_N$) путем замены граничных условий при $z = 0$ и $z = z_N$ замыкающими условиями. Сначала решаем задачу для режима выключения (при $t = 0$), сводя к задаче с начальным условием. При этом получим вместо (22) следующую задачу для функции X , которая нас только и интересует здесь:

$$\begin{aligned} X''_{zz} - \lambda^2 X &= \mu\sigma \frac{\partial X}{\partial t}, \quad z_i > z > z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ X'_z + \lambda \frac{\mu_1}{\mu_0} X &= 0, \quad z = 0, \\ [\mu X] = 0, \quad [X'_z] &= 0, \quad z = z_2, \dots, z_{N-1}, \\ X'_z - \lambda \frac{\mu_{N-1}}{\mu_N} X &= 0, \quad z = z_N, \\ X &= \bar{X}(\lambda, z), \quad t = 0; \quad X = 0, \quad t = \infty, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\bar{X}(\lambda, z)$ — решение для постоянного тока. Заметим, что начальным условием для функции X является распределение (Фурье-образ) магнитного поля постоянного стороннего тока.

В этом случае параметр α может принимать дискретный набор вещественных значений $\alpha_j \geq 0$ и решение для функции X представляется в виде ряда Фурье:

$$X = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \zeta_j(z) T_j(t), \quad (42)$$

где $T_j = \exp(-\alpha_j t)$ для мгновенного выключения. Если же ток в источнике меняется как $q(t)$, то

$$T_j = - \int_{-\infty}^t q(\tau) \alpha_j \exp[-\alpha_j(t - \tau)] d\tau.$$

Функции ζ_j последовательно определяем сверху вниз, положив $\zeta'_{j1} = \lambda$ с учетом (37) и удовлетворяя граничным условиям в (41). Условие на нижней границе является уравнением для определения α_j . В случае сверхпроводящего основания условие на нижней границе для функции X есть $\zeta_{jN} = 0$.

Коэффициенты C_j определяются исходя из начальных условий для функции X и ортогональности функций $\mu\sqrt{\sigma}\zeta_j$ в области $0 \geq z \geq z_N$. Также нужно учесть, что функция $\bar{X}(\lambda, z)$ удовлетворяет уравнению

$$F''_{zz} - \lambda^2 F = 0$$

и тем же условиям на границах, что и функция X . Итак,

$$C_j = \frac{2\lambda f_{j1}}{\alpha_j \sum_{i=1}^{N-1} M_{ji} \mu_i^2 \sigma_i}, \quad (43)$$

где в каждом слое определяется

$$M_{ji} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} [\zeta_j(z)]^2 dz = \frac{1}{2u_{ji}^2} [d_i(\zeta_{ji}^2 u_{ji}^2 - [\zeta'_{ji}]^2) + (\zeta_{ji+1} \zeta'_{ji+1} - \zeta_{ji} \zeta'_{ji})],$$

непрерывные функции f определены в (36), а $d_i = z_i - z_{i+1}$ — мощности слоев ($i = 1, 2, \dots, N - 1$).

Заметим, что $u_{ji} = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_j \mu_i \sigma_i}$ может принимать мнимые значения, тогда вещественное гиперболическое решение (37) переходит в вещественное тригонометрическое решение. Вещественная арифметика этого алгоритма позволяет создать весьма быстрые численные процедуры.

Итак, краевая задача для функции X решена. Здесь в весьма компактной форме приведен одномерный математический аппарат, с помощью которого можно построить алгоритм для расчета устанавливающегося поля индуктивного источника на дневной поверхности (или на любой другой границе), притом двумя способами, совместное использование которых позволяет организовать универсальные надежные и быстрые вычислительные процедуры (как это и сделано в комплексе ПОДБОР).

§ 3. РЕШЕНИЕ ТИХОНОВА

Выше кратко приведено решение задачи становления двумя способами. Во многих деталях, еще больше в их сочетании, это решение нестандартно. Напомним, что источник учтен как граничное условие, уменьшено число определяемых функций без введения потенциалов, начато решение задачи с перехода к нестационарной задаче в области пространственных гармоник (классический подход предусматривает введение векторов-потенциалов для точечных источников и переход в частотный режим). Далее, в области пространственных гармоник решается одномерная нестационарная задача двумя способами разделения переменных и получены, соответственно, интеграл Фурье и (в квазистационарном приближении и при бесконечном или нулевом сопротивлении основания) ряд Фурье. Но, отвлекаясь от деталей и порядка применения преобразований, нужно признать, что полученные здесь решения (более удобные, компактные и общие) всё же соответствуют двум классическим решениям, известным как решение в частотной области и решение во временной области. Как известно, эти два основных подхода к решению задачи об установлении поля в слоистой среде были предложены почти одновременно А. Н. Тихоновым [8, 9] и М. С. Шейнманом [7].

Решение по Шейнману приводит к двукратному интегралу Фурье — Ганкеля. Алгоритм, использованный Шейнманом, получил наибольшее распространение и развитие в России и за рубежом (см., например, [3, 4]) несмотря на трудности в численной реализации, связанные с осциллирующими факторами в преобразованиях Фурье и Ганкеля. Разумеется, это понятно и естественно: решение универсально и в качестве промежуточного этапа включает в себя расчет привычного частотного режима, который является сам по себе рабочим режимом некоторых электромагнитных методов. Так что трудности численной реализации так или иначе были преодолены, но только в квазистационарном приближении. Наиболее значительными численными реализациями этого подхода явились в России программа Л. А. Табаровского и В. П. Соколова [10], в которой использовалась при интегрировании сплайн-интерполяция, и программы У. Л. Андерсона за рубежом, в которых он применил свой метод цифровой фильтрации [11–14].

Однако решение задачи установления в виде двойного интеграла Фурье — Ганкеля имеет еще тот недостаток, что оно с большим трудом поддается асимптотическим разложениям. На его основе весьма сложно провести анализ осо-

бенностей установления поля различных источников, особенно в средах с изолирующим основанием.

Метод Тихонова некоторое время развивался в работах О. А. Скугаревской, П. П. Фролова и других авторов [15, 16], однако это не привело к появлению эффективной вычислительной процедуры для многослойных сред. За рубежом это решение почти не известно (можем указать лишь работу [17]) и мало применялось в нашей стране. Нужно заметить, что решение Тихонова, которое мы здесь обсуждаем, вовсе не единственное представление решения задачи установления во временной области. Сам же А. Н. Тихонов дал и другое решение [18] методом многократных отражений, удобное в ранней стадии. Общий подход к решению во временной области состоит в переходе к одномерной нестационарной или квазистационарной задаче в области пространственных гармоник. Поэтому такой подход иногда называют методом устанавливающихся пространственных гармоник. Эту одномерную задачу можно решать различными способами. В работе [19] эта задача решается конечно-разностным способом. Авторы работы [20] разделили переменные (t и z) в краевой задаче и свели ее к задаче Штурма, которую также предложили решать численно. Собственно подход Тихонова состоит в последовательном аналитическом решении также и задачи Штурма, получении и анализе уравнения для собственных значений, представлении решения в виде ряда по собственным функциям и аналитическом выражении коэффициентов такого представления на основании начального условия.

Возможен также подход к решению во временной области, основанный на аппроксимации геоэлектрической модели. Для магнитной моды, возбуждаемой токовой петлей, расположенной на дневной поверхности, можно с достаточной точностью описать непрерывную по вертикали горизонтально-слоистую геоэлектрическую среду дискретным набором проводящих плоскостей. Решение в этом случае обладает некоторой благоприятной для численных расчетов спецификой [21, 22].

Возвращаясь к оригинальной работе А. Н. Тихонова [8], нужно заметить, что там был дан весьма частный случай двухслойной среды, который не так то просто может быть обобщен. Однако нам удалось успешно использовать этот способ решения как чрезвычайно эффективное средство для получения асимптотических выражений для поздних стадий установления полей различных источников [23–25]. Мы также успешно численно реализовали и многослойный алгоритм для расчетов процессов установления электрического и магнитного типов при возбуждении различными источниками [5, 6, 26]. Так или иначе подход Тихонова, над развитием которого мы много работали, нуждается в современном изложении.

Приведем подробное решение задачи установления способом, предложенным А. Н. Тихоновым [8]. В контексте этой работы необходимо получить решение только для магнитной моды, что мы и сделаем, используя токовую петлю в качестве источника. Рассмотрим пока произвольную горизонтально-слоистую модель (в которой $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N$ — проводимости, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}, \mu_N$ — магнитные проницаемости, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}, \varepsilon_N$ — диэлектрические проницаемости, $z_1 = 0 > z_2 > \dots > z_{N-1} > z_N$ — координаты границ). На границе с номером l ($z = z_l$) поместим горизонтальную токовую петлю радиуса a , ток в которой изменяется по закону $Iq(t)$.

Нетрудно видеть, учитывая (23)–(28), что в цилиндрической системе координат отличны от нуля компоненты H_r , H_z и E_φ , которые можно представить в следующем виде:

$$H_r(r, z, t) = -\frac{I}{2} \int_0^\infty J_1(\lambda r) a J_1(\lambda a) \frac{\partial X(z, t, \lambda)}{\partial z} d\lambda,$$

$$H_z(r, z, t) = \frac{I}{2} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) a J_1(\lambda a) \lambda X(z, t, \lambda) d\lambda, \quad (44)$$

$$E_\varphi(r, z, t) = \frac{I\mu(z)}{2} \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) a J_1(\lambda a) \frac{\partial X(z, t, \lambda)}{\partial t} d\lambda.$$

В общем случае для функции X имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \lambda^2 X &= \mu\sigma \frac{\partial X}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \quad z_i > z > z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ [\mu X] &= 0, \quad [X'_z] = -2\lambda q(t)\Delta(i-l), \\ X &\rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (45)$$

где $i = 1, \dots, N$, а $\Delta(i-l) = 1$, если $i = l$, и $\Delta(i-l) = 0$, если $i \neq l$.

Эту задачу, как мы выяснили выше, можно решить, разделяя переменные и отделяя переменную t в виде $\exp(-i\omega t)$, где независимая переменная ω принимает непрерывный спектр значений $-\infty \leq \omega \leq \infty$, что и приводит нас к традиционному решению задачи установления, известному как решение в частотной области.

Но сейчас нас интересует решение, которое предложил А. Н. Тихонов. Чтобы отвлечься от деталей, считаем среду немагнитной (всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума). Первый шаг состоит в ограничении задачи по z областью $0 \geq z \geq z_N$. Для этого примем квазистационарное приближение (всюду $\varepsilon = 0$) и положим сопротивления верхнего и нижнего полупространств равными бесконечности ($\sigma_0 = \infty$, $\sigma_N = \infty$). В этих областях правая часть в уравнении для функции X обращается в нуль, и в верхнем полупространстве решение есть $X(z, t) = X(0, t) \exp(-\lambda z)$, в нижнем, соответственно, $X(z, t) = X(z_N, t) \exp[\lambda(z - z_N)]$. Приближаясь к границам, в пределе на самих границах получим, что

$$X'_z(0, t) + \lambda X(0, t) = 0, \quad X'_z(z_N, t) - \lambda X(z_N, t) = 0.$$

Но это условия на внешних сторонах границ области $0 \geq z \geq z_N$. Учитывая условия на границах для функции X в (45), получим условия на внутренних сторонах границ области:

$$\begin{aligned} X'_z(0, t) + \lambda X(0, t) &= -2\lambda q(t)\Delta(1-l), \\ X'_z(z_N, t) - \lambda X(z_N, t) &= -2\lambda q(t)\Delta(N-l). \end{aligned}$$

Далее, упростим задачу, рассмотрев режим источника как выключение постоянного тока в момент $t = 0$ (т. е. $q(t) = 1 - U(t)$, где $U(t)$ — функция Хевисайда), что позволяет отдельно рассмотреть стационарную задачу и использовать ее решение как начальное условие для квазистационарной. Итак, в ограниченной области $0 \geq z \geq z_N$ имеем стационарную задачу с источником:

$$\begin{aligned} \overline{X}_{zz}'' - \lambda^2 \overline{X} &= 0, \quad z_i > z > z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \overline{X}'_z + \lambda \overline{X} &= -2\lambda \Delta(1-l), \quad z = z_1 = 0, \\ [\overline{X}] &= 0, \quad [\overline{X}'_z] = -2\lambda \Delta(i-l), \quad z = z_i, \\ \overline{X}'_z - \lambda \overline{X} &= -2\lambda \Delta(N-l), \quad z = z_N, \end{aligned} \quad (46)$$

и квазистационарную во временной области $t \geq 0$ уже без источника:

$$\begin{aligned} X''_{zz} - \lambda^2 X &= \mu_0 \sigma \frac{\partial X}{\partial t}, \quad z_i > z > z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ X'_z + \lambda X &= 0, \quad z = 0, \\ [X] &= 0, \quad [X'_z] = 0, \quad z = z_i, \\ X'_z - \lambda X &= 0, \quad z = z_N, \\ X &= \overline{X}(\lambda, z), \quad t = 0; \quad X = 0, \quad t = \infty, \end{aligned} \quad (47)$$

где $i = 1, \dots, N-1$.

Разделяем переменные в краевой задаче (47) вполне очевидным образом как $\zeta(z) \exp(-\alpha t)$, требуя $\alpha > 0$. Тогда для функции $\zeta(z)$ получаем краевую задачу третьего рода типа Штурма:

$$\zeta''_{zz} - (\lambda^2 - \mu_0 \sigma \alpha) \zeta = 0, \quad z_i > z > z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (48)$$

$$\zeta'_z + \lambda \zeta = 0, \quad z = 0, \quad (49)$$

$$[\zeta] = 0, \quad [\zeta'_z] = 0, \quad z = z_i, \quad (50)$$

$$\zeta'_z - \lambda \zeta = 0, \quad z = z_N, \quad (51)$$

где произведение $\mu_0 \sigma$ есть кусочно-постоянная функция z . Проблему решения (48)–(51) можно охарактеризовать как самосопряженную задачу о собственных значениях, для которой имеет место осцилляционная теорема Штурма [27].

Существует бесконечное множество собственных значений, все собственные значения действительны и могут быть расположены в виде неограниченно возрастающей монотонной последовательности ($\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots$). Каждое собственное значение имеет кратность 1; таким образом, все собственные функции $\zeta_j(z)$, соответствующие одному и тому же собственному значению α_j , отличаются друг от друга лишь на постоянный, отличный от нуля множитель. Каждая собственная функция $\zeta_j(z)$ имеет в открытом интервале (z_1, z_N) ровно j нулей. Собственные функции удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{z_1}^{z_N} \mu_0 \sigma(z) \zeta_k(z) \zeta_j(z) dz = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j. \quad (52)$$

Авторы работы [20] предпочли конечно-разностное решение проблемы (51)–(58), здесь же предлагается продолжить аналитическое развитие решения. Итак, в i -м слое имеем общее решение уравнения (48) в виде $\zeta(z) = A_i \exp(u_i z) + B_i \exp(-u_i z)$, где $u_i = \sqrt{\lambda^2 - \mu_0 \sigma_i \alpha}$. Можно представить это в другом виде, выразив коэффициенты A_i, B_i через значения функции и ее производной на i -й границе:

$$\zeta(z) = \zeta_i \operatorname{ch}[u_i(z - z_i)] + \frac{\zeta'_i}{u_i} \operatorname{sh}[u_i(z - z_i)]. \quad (53)$$

Такое представление дает ключ к решению задачи (48)–(51). В самом деле, положив на верхней границе $\zeta_1 = 1$, получим $\zeta'_1 = -\lambda$ из (49). Теперь, используя (53) как рекуррентную формулу для вычисления z_{i+1} через z_i, ζ_i, ζ'_i , получаем посредством условия на нижней границе (51) уравнение для собственных значений α_j . В процессе решения этого уравнения определяются все $\zeta_i, \zeta'_i, i = 2, \dots, N$, для каждого собственного значения α_j и в соответствии с (53) определяется полностью каждая собственная функция $\zeta_j(z)$ в области

$z_1 = 0 \geq z \geq z_N$. Здесь и ниже мы используем индекс j для нумерации собственных чисел и собственных функций, а индекс i — для нумерации слоев в разрезе. Таким образом, ζ_{ji} есть значение j -й собственной функции на i -й границе. Также $u_{ji} = \sqrt{\lambda^2 - \mu_0 \sigma_i \alpha_j}$.

Теперь можно представить общее решение квазистационарной задачи (47) в виде суперпозиции:

$$X(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \zeta_j(z) \exp(-\alpha_j t), \quad (54)$$

где коэффициенты C_j найдем, удовлетворяя начальному условию:

$$\bar{X}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \zeta_j(z). \quad (55)$$

Для нахождения C_j умножим (55) на $\mu_0 \sigma \zeta_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots$) и проинтегрируем по z от нуля до z_N . Дифференцированием можно убедиться, что имеют место первообразные:

$$\begin{aligned} \int \mu_0 \sigma \zeta_j \zeta_k dz &= \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j} (\zeta_j' \zeta_k - \zeta_j \zeta_k'), \\ \int \mu_0 \sigma \zeta_j^2 dz &= \frac{\mu_0 \sigma}{2u_j} \{z [u_j^2 \zeta_j^2 + (\zeta_j')^2] - \zeta_j' \zeta_j\}, \\ \int \mu_0 \sigma \bar{X} \zeta_k dz &= \frac{1}{\alpha_k} (\bar{X}' \zeta_k - \bar{X} \zeta_k'). \end{aligned}$$

Подставляя пределы в каждом однородном слое и суммируя и пользуясь далее условиями краевых задач для функций \bar{X} и ζ_j , убеждаемся, что соотношение ортогональности справедливо и в нашем случае кусочно-постоянной функции $\sigma(z)$, и для C_j получаем

$$C_j = \frac{\int_0^{z_N} \mu_0 \sigma \bar{X} \zeta_j dz}{\int_0^{z_N} \mu_0 \sigma \zeta_j^2 dz} = \frac{2\lambda \zeta_{jl}}{\mu_0 \alpha_j M_j}, \quad (56)$$

где

$$M_j = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sigma_i}{2u_{ji}^2} \{d_i [\zeta_{ji}^2 u_{ji}^2 - (\zeta_{ji}')^2] + (\zeta_{ji+1} \zeta_{ji+1}' - \zeta_{ji} \zeta_{ji}')\},$$

$d_i = z_i - z_{i+1}$ — мощности слоев, а для ζ_{ji} и ζ_{ji}' имеем в соответствии с общим выражением (53) рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \zeta_{ji+1} &= \zeta_{ji} \operatorname{ch}(u_{ji} d_i) - \frac{\zeta_{ji}'}{u_{ji}} \operatorname{sh}(u_{ji} d_i), \\ \zeta_{ji+1}' &= -\zeta_{ji} u_{ji} \operatorname{sh}(u_{ji} d_i) + \zeta_{ji}' \operatorname{ch}(u_{ji} d_i). \end{aligned} \quad (57)$$

Следует обратить внимание на то, что u_{ji} могут принимать мнимые значения и тогда вещественное гиперболическое решение переходит в вещественное тригонометрическое решение, т. е.

$$\begin{aligned} \zeta_{ji+1} &= \zeta_{ji} \cos(u_{ji} d_i) - \frac{\zeta_{ji}'}{u_{ji}} \sin(u_{ji} d_i), \\ \zeta_{ji+1}' &= \zeta_{ji} u_{ji} \sin(u_{ji} d_i) + \zeta_{ji}' \cos(u_{ji} d_i), \end{aligned} \quad (58)$$

где теперь $u_{ji} = \sqrt{\mu_0 \sigma_i \alpha_j - \lambda^2}$.

Таким образом, задача решена. Подчеркнем, что описанный алгоритм вполне успешно используется уже более десятилетия для расчетов кривых становления в комплексе программ ПОДБОР для обработки данных электроразведки методом ЗСБ в реальном диапазоне времен для сред с любым основанием, хотя он наиболее удобен для расчетов поздней стадии процесса в средах с изолирующим основанием. При численной реализации основные трудности связаны с решением трансцендентного уравнения для собственных значений. Однако эта проблема (проблема начального приближения) чрезвычайно облегчается именно из-за необходимости решать уравнение для каждого узла интегрирования в интегралах (44).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 55–65.
2. Табаровский Л. А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975.
3. Ваньян Л. Л. Основы электромагнитных зондирований. М.: Недра, 1965.
4. Уэйт Дж. Р. Геоэлектромагнетизм. М.: Недра, 1987.
5. Могилатов В. С. Индуктивный, смешанный и гальванический источники в электроразведке становлением поля // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. 1997. № 12. С. 42–51.
6. Могилатов В. С. Возбуждение электромагнитного поля в слоистой Земле горизонтальным токовым листом // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. 1998. № 5. С. 45–53.
7. Шейнман С. М. Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикл. геофизика. Вып. 9. М.: Гостоптехиздат, 1947. С. 3–55.
8. Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной среде. II // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1950. Т. 14, № 4. С. 281–293.
9. Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1946. Т. 10, № 3. С. 213–231.
10. Табаровский Л. А., Соколов В. П. Программа расчета нестационарного поля дипольных источников в горизонтально-слоистой среде (АЛЕКС) // Электромагнитные методы геофизических исследований. Новосибирск: изд. ИГиГ СО АН СССР, 1982. С. 57–77.
11. Anderson W. L. Improved digital filters for evaluating Fourier and Hankel transform integrals // U. S. Dept. of Commerce, Nat. Tech. Inform. Service Report PB-242-156, 1975.
12. Anderson W. L. Computer program numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering // Geophysics. 1979. V. 44, N 7. P. 1287–1305.
13. Anderson W. L. Computation of Green's tensor integrals for three-dimensional electromagnetic problems using fast Hankel transforms // Geophysics. 1984. V. 49, N 10. P. 1754–1759.
14. Anderson W. L. A hybrid fast Hankel transform algorithm for electromagnetic modelling // Geophysics. 1989. V. 54, N 2. P. 263–266.
15. Скугаревская О. А. Расчет конечной стадии процесса становления электрического поля в трехслойной среде // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1959. N 1. С. 59–72.
16. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Фролов П. П. Некоторые вопросы метода становления поля в ближней зоне. М.: Изд-во МГУ, 1973.
17. Prácser E. Fast computing of transient electromagnetic field on the surface of a layered half-space // Geofizik. kozlomenyek. 1992. V. 37, N 2–3. P. 159–176.
18. Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1950. Т. 14, № 3. С. 199–222.
19. Goldman M. M. The integral finite difference method for calculating transient electromagnetic fields in a horizontally stratified medium // Geophys. Prospecting. 1983. V. 31, N 4. P. 664–686.
20. Эпов М. И., Ельцов И. Н. Релаксация электромагнитного поля дипольного источника в проводящем слоистом пласте, погруженном в изолятор // Геология и геофизика. 1991. № 10. С. 126–129.
21. Табаровский Л. А., Эпов М. И. Дискретные спектры в задачах дифракции нестационарного поля на пленках Шейнмана // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1998. № 9. С. 46–54.

22. Эпов М. И., Ельцов И. Н. Прямые и обратные задачи индуктивной геоэлектрики в одномерных средах. Новосибирск: изд. ОГГИМ СО РАН. 1992.
23. Могилатов В. С. Поздняя стадия становления электромагнитного поля, возбуждаемого погруженным электрическим диполем // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1976. № 8. С. 103–107.
24. Гольдман М. М., Могилатов В. С. Становление поля вертикального электрического диполя, погруженного в горизонтально-слоистое полупространство // Теория и опыт применения электромагнитных полей в разведочной геофизике / Сб. науч. тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1978. С. 123–138.
25. Рабинович Б. И., Могилатов В. С. Становление поля погруженного вертикального магнитного диполя // Геология и геофизика. 1981. № 3. С. 88–100.
26. Могилатов В. С. Об одном способе решения основной прямой задачи электроразведки ЗС // Геология и геофизика. 1993. № 3. С. 108–117.
27. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

г. Новосибирск
Институт геофизики СО РАН
E-mail: VMogilat@uiggm.nsc.ru

Статья поступила 15 августа 2005 г.